

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

<http://www.xriadiat.com>**PRODUIT SCALAIRE DANS \mathcal{V}_2** **Etude analytique (2) -Applications- : cercle**

Dans tout ce qui va suivre le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé.

1) EQUATION D'UN CERCLE

Définition : Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan (\mathcal{P}) qui vérifient : $\Omega M = r$ on le note, $\mathcal{C}(\Omega, r)$:

$$\mathcal{C}(\Omega; r) = \{M \in (\mathcal{P}) / \Omega M = r\}$$

Remarque : On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif,

$$M(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega; r) \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Exemple : Déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1; 2)$ et de rayon $r = 3$

Solution : l'équation cartésienne du cercle est : $\mathcal{C}(\Omega, r): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

C'est-à-dire : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

Propriété : Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ à une équation cartésienne de la forme : $\mathcal{C}(\Omega, r): (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

2) Equation réduite d'un cercle

On a : $M(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + \gamma = 0$ où : $\alpha = -2a$; $\beta = -2b$ et $\gamma = a^2 + b^2 - r^2$

Propriété1 : Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2 + y^2 + ax + by + \gamma = 0$ où α , β et γ sont des réels.

Propriété2 : Soit (C) L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

avec a ; b ; c des réelles

• Si : $a^2 + b^2 - c > 0$ alors (C) est un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

• Si : $a^2 + b^2 - c = 0$ alors $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

• Si : $a^2 + b^2 - c < 0$ alors $(C) = \emptyset$

PREUVE : $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + c - a^2 - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c = 0$

• Si : $a^2 + b^2 - c > 0$ alors (C) est un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

• Si : $a^2 + b^2 - c = 0$ alors $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

• Si : $a^2 + b^2 - c < 0$ alors $(C) = \emptyset$

Exemples : Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants : **1)** $(E): x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$

2) $(E): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

3) $(E): x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$

Solutions : 1) $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = -4$

On a : $a^2 + b^2 - c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-4) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4 = \frac{13}{2} > 0$

Donc : $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$ donc : $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$; $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - c}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

Alors (E) : est un cercle de centre : $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$

2) $a = 3; b = -1; c = 10$ et $a^2 + b^2 - c = 3^2 + (-1)^2 - 10 = 9 + 1 - 10 = 0$

Alors : $(E) = \{\Omega(3; -1)\}$

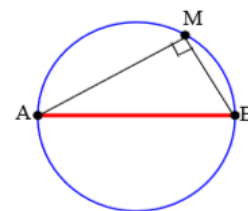
3) $a = 2; b = 0; c = 5$

$a^2 + b^2 - c = 4 - 5 = -1 < 0$ Alors $(E) = \emptyset$

3) Cercle définie par son diamètre.

Propriété : (Rappelle)

Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :



Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre $[AB]$ à pour équation : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

Exemple : Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 2)$ et $B(-3; 1)$

Solution : $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

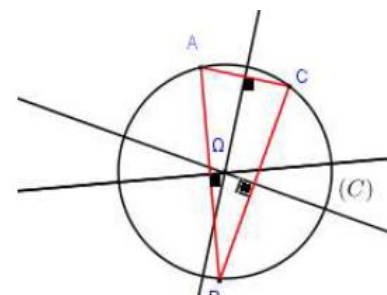
$\overrightarrow{MA}(1-x; 2-y)$ et $\overrightarrow{MB}(-3-x; 1-y)$

$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (-3-x)(1-x) + (1-y)(2-y) = 0$

Donc : $(C): x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 = 0$

4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle

Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC



Exemple : Le plan (P) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé.

Soient les points $A(2; 3)$ $B(0; 1)$; $C(-4; 5)$; $E(5; 2)$ et $F(2; 4)$

1) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC .

2) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF .

Solution : 1) Soient $I(1;2)$ et $J(-1;4)$ le milieu respectivement du segment : $[AB]$ et $[AC]$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$ donc (Δ) passe par $I(1;2)$ et \overline{AB} un vecteur normal a (Δ)

Et on a : $\overline{AB}(-2;-2)$ donc une équation de (Δ) est : $(\Delta): -2(x-1) - 2(y-2) = 0$

Donc : $(\Delta): -2x + 2 - 2y + 4 = 0$ donc $(\Delta): -2x - 2y + 6 = 0$

Donc : $(\Delta): x + y - 3 = 0$ (après simplifications)

Et soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$ donc (Δ') passe par $J(-1;4)$ et \overline{AC} un vecteur normal a (Δ') et on

a : $\overline{AC}(-6;2)$ donc une équation de (Δ') est : $(\Delta'): -6(x+1) + 2(y-4) = 0$ donc : $(\Delta'): 3x - y + 7 = 0$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ)

et (Δ') on va donc résoudre le système :
$$\begin{cases} (\Delta): x + y - 3 = 0 \\ (\Delta'): 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $(-1;4)$

Donc : $\Omega(-1;4)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est :

$$r = A\Omega = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$ ou bien : $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$

2) Déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme : $(C'): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Et on a : $O \in (C') \Leftrightarrow c = 0$

$$E(5;2) \in (C') \Leftrightarrow 25 + 4 - 10a - 4b = 0$$

$$F(2;4) \in (C') \Leftrightarrow 4 + 16 - 4a - 8b = 0$$

On va donc résoudre le système :
$$\begin{cases} 10a + 4b = 29 \\ a + 2b = 5 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{19}{8} \\ b = \frac{21}{16} \\ c = 0 \end{cases}$$
 et l'équation du cercle est :

$$(C'): x^2 + y^2 - \frac{19}{4}x - \frac{21}{8}y = 0$$

II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition : Soit $C(\Omega; r)$ un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r , il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $C(\Omega; r)$

b) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $C(\Omega; r)$

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

Exemple : Nous allons résoudre graphiquement le système :

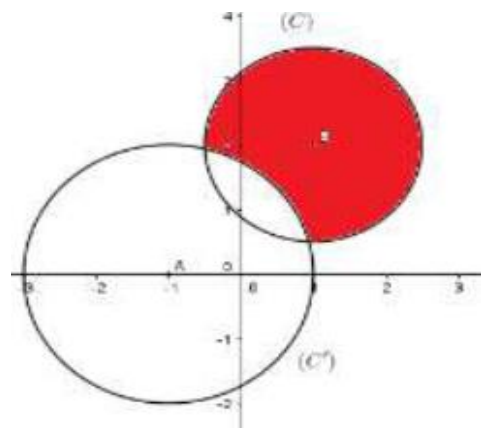
$$(S) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} = 0$$

est l'équation du cercle (C) de centre B(1,2) et de rayon $r = \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ est l'équation du cercle (C') de centre A(-1,0) et de rayon $r' = 2$.

L'ensemble des points M qui vérifient (S) est l'extérieur de (C') intersection l'intérieur de (C)



Exercice1 : résoudre graphiquement le système : $(S) \begin{cases} (1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \\ (2): x - y - 1 > 0 \end{cases}$

Solution :

- (1): $x^2 + y^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < 2^2$

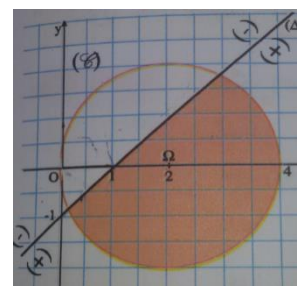
Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples (x; y) des points qui se trouvent à l'intérieurs du cercle (C) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $r = 2$

- (2): $x - y - 1 > 0$: les solutions de cette inéquation c'est les couples (x; y) des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation :

$$(\Delta): x^2 + y^2 - 4x = 0$$

(demi plan qui contient $\Omega(2;0)$ Car : $2 - 0 - 1 = 1 > 0$)

Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples (x; y) des points qui appartiennent à la partie colorée.



Exercice2 : Résoudre graphiquement : $(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9) (2x - y + 1) \leq 0$

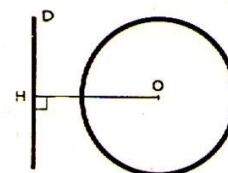
III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

1) Propriété : Soit $C(O; r)$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan.

Pour étudier les positions relatives du cercle $C(O; r)$ de (D), il suffit de déterminer la distance de O à (D). soit H la projection orthogonal de O sur (D)

1) Si $d(O; (D)) = OH > r$

Soit M un point de la droite (D) on a : $OM \geq OH > r$ donc tout point de la droite (D) est strictement à l'extérieure du cercle (C) : $(C) \cap (D) = \emptyset$



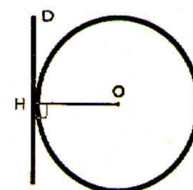
2) $d(O; (D)) = OH = r$

Puisque $OH = r$ alors H est un point commun entre (D) et (C).

Soit M un point de la droite (D) Différent de H on a : $OM > OH = r$

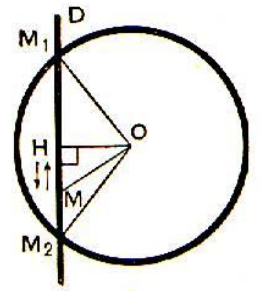
Donc tout point de la droite (D) différent de H est strictement à l'extérieure du cercle (C).

$(C) \cap (D) = \{H\}$ Ont dit que la droite (D) est tangente au cercle (C) en H



3) $d(O, (D)) = \Omega H < r$

Dans ce cas le cercle (C) et la droite (D) se coupent en deux points M_1 et M_2 et H est le milieu du segment $[M_1M_2]$



Exemple1 : Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation (D): $x + y + 2 = 0$

Solution : On calcul $d(\Omega, (P))$?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R = 2$$

Donc : droite (D) est à L'extérieur du cercle (C) : $(C) \cap (D) = \emptyset$

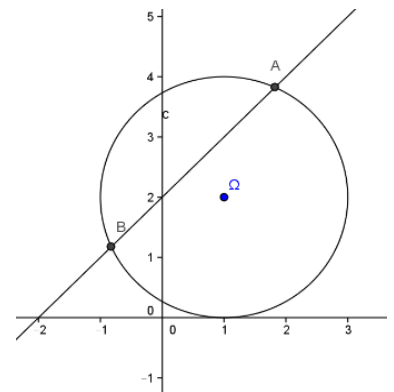
Exemple2 : Etudier la position du cercle (C) de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation (D): $x - y + 2 = 0$

Solution : On calcul $d(\Omega, (P))$?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2$$

Donc : le cercle (C) et la droite (D) se coupent en deux points A et B
Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant : $\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2 + (y-2)^2 = (2)^2 \\ (2)x - y + 2 = 0 \end{cases}$



On a : (2) $\Leftrightarrow x + 2 = y$

En remplaçant dans (1) $y = x + 2$

On trouve : (1) $(x-1)^2 + (x+2-2)^2 = (2)^2$

Donc : $(x-1)^2 + (x)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = 4$

Donc : $2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Delta = 28$

Donc : $x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4}$ et $x_2 = \frac{2-2\sqrt{7}}{4}$

Donc : $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

Si : $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x + 2 = y$: On trouve : $y_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

Si : $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans : $x + 2 = y$

On trouve : $y_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$

Donc : les points d'intersections sont :

$A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$

Exemple3 : Etudier la position du cercle (\mathcal{C}) de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=1$ avec la droite d'équation (D): $y=3$

Solution : On calcul $d(\Omega,(P))$?

$$(D): 0x+1y-3=0$$

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 = R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle (\mathcal{C}) en A

Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

L'équation de (\mathcal{C}) est $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

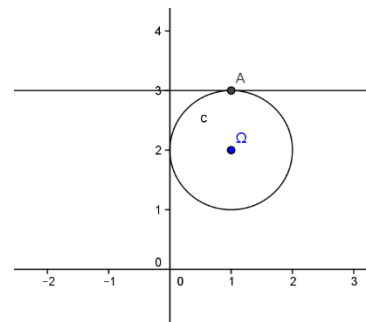
$$\text{On va résoudre le système suivant : } \Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2+(y-2)^2=1 \\ (2)y=3 \end{cases}$$

En remplaçant dans $y=3$ dans (1) on aura :

$$(1)(x-1)^2+1=1 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0$$

Donc : $x=1$

Donc : Le point de tangence est $A(1;3)$



2) Droite tangente à un cercle.

2.1 Définition : Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

Définition : Une droite (D) est dite tangente à un cercle (\mathcal{C}) s'ils se coupent en un seul point.

Propriété : Une droite (D) est dite tangente au cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ si et seulement si $d(\Omega, (D)) = r$

2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $\mathcal{C}(\Omega, r)$ un cercle dans le plan où $\Omega(a, b)$ et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $\mathcal{C}(\Omega, r)$ en A

$$M(x; y) \in (T) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow (x-x_A)(y-y_A) + (a-x_A)(b-y_A) = 0$$

Propriété : Soient $\Omega(a, b)$ un point et $\mathcal{C}(\Omega, r)$ un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $\mathcal{C}(\Omega, r)$ en A à pour équation : $(x-x_A)(y-y_A) + (a-x_A)(b-y_A) = 0$

Exemple : Soit (\mathcal{C}) le cercle d'équation : $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ (1)

1) Vérifier que $A(0;1) \in (\mathcal{C})$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle (\mathcal{C}) en A.

Solution : 1) On a : $0^2+1^2-4 \times 0-2 \times 1+1=0$

Donc $A(0;1) \in (\mathcal{C})$

2) L'équation de la tangente au cercle (\mathcal{C}) en A. ??

$$a=2; b=1; c=1 : a^2+b^2-c=2^2+1^2-1=4>0$$

Donc (\mathcal{C}) cercle de centre $\Omega(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2})$ cad $\Omega(2;1) : \overline{A\Omega}(-2;0)$ et $\overline{AM}(x-0; y-1)$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow -2(x-0) = 0 \Leftrightarrow -2(x-0) + 0(y-1) = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow x=0$$

Donc : L'équation de la tangente au cercle (\mathcal{C}) en A est : (D): $x=0$

Application : Soit (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$

- 1) Vérifier que le point $A(3, -1)$ appartient au cercle
- 2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle (C) en A .

2.3 Tangente à un cercle (C) passant par un point à l'extérieur de (C)

Exercice : Soient le cercle (C) : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ et $A(5,6)$

- 1) Vérifier que le point A est à l'extérieur de (C)
- 2) a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées.
b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à (C) .
- 3) Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta) y = mx + p$
 - a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.
 - b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle (C) .
- 4) Soit $B(4,5)$
 - a) Montrer que la droite passant par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle (C) .
 - b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta') y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle (C) .

2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit (C) le cercle de centre $\Omega(-1,2)$ et de rayon 3.

Déterminer les équations des tangentes à (C) et de vecteur directeur $\vec{u}(-2;1)$.

3) Equation paramétrique d'un cercle.

Le plan (P) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé.

Considérons (C) le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r . On a : $\vec{OM} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega M}$ (1)

Si $M(x, y)$ dans \mathcal{R} et $M(X, Y)$ dans \mathcal{R}' où : $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ et $\mathcal{R}'(O; \vec{i}; \vec{j})$

Alors (1) se traduit analytiquement par : $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$ Or $\begin{cases} X = r \cos \alpha \\ Y = r \sin \alpha \end{cases}$ et par suite : $\begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases}$

Réciproquement l'ensemble : $(C) = \left\{ M(x, y) \in (P) / \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases} \right\}$ où a et b sont des réels et r un

réel positif est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r

Exemple1 : Déterminer l'équation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega(1; -2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$

Solution : L'équation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega(1; -2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$ est :

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = -2 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

Exemple2 : Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x; y)$ du plan tel que : $\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$

avec $(\theta \in \mathbb{R})$

Solution : $\begin{cases} x - 3 = \sqrt{3} \cos \theta \\ y - 1 = \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{3} \cos \theta)^2 + (\sqrt{3} \sin \theta)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 3((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{3}^2$$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x; y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(3;1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$

Exercice1 : le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. (C) L'ensemble des points

$M(x; y)$ du plan tel que :

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

1) Montrer que (C) est *le cercle* (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2) Soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle (C) passant par A

3) Déterminer les équations des deux tangentes au cercle (C) et qui sont parallèles à la droite :

$$(D) : 3x - 4y = 0$$

4)a) Soit la droite (Δ) d'équation : $y = x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4)b) Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que : $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y$

Solution :1)
$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 \cos \theta \\ y - 0 = 2 \sin \theta \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = (2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = 4((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x; y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $R = 2$

2) $A(-1;0)$; $(C) : (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

On a : $(-1-2)^2 + (0-0)^2 - 4 = 9 - 4 > 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)

Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle (C) et soit : $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a; b) \neq (0; 0)$

Puisque (T) est tangente au cercle (C) alors : $d(\Omega, (T)) = R$ cad $\frac{|2a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2$:

Et on a : $A \in (T)$ donc : $-a + c = 0$ donc on trouve : $b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ou $b = -\frac{a\sqrt{5}}{2}$ et l'équation cartésienne de (T) est : $2x - \sqrt{5}y + 2 = 0$ ou $2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle (C) passant par A sont :

$$(T_1) : 2x - \sqrt{5}y + 2 = 0 \text{ ou } (T_2) : 2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$$

$$3)(D) : 3x - 4y = 0 \quad \Omega(2;0)$$

Puisque $(T) \parallel (D)$ donc on pose : $(T) : 3x - 4y + c = 0$ et (T) tangentes au cercle (C)

$$\text{Donc : } d(\Omega, (T)) = R \Leftrightarrow \text{cad } \frac{|6 + c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2 :$$

$$\Leftrightarrow \frac{|6+c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |6+c| = 10 \Leftrightarrow 6+c = 10 \text{ ou } 6+c = -10 \Leftrightarrow c = 4 \text{ ou } c = -16$$

Donc les tangentes au cercle (C) sont : $(T_1) : 3x - 4y + 4 = 0$ ou $(T_2) : 3x - 4y - 16 = 0$

4)a) On va résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \\ y = x \end{cases}$$
 donc : $y = x$ et $2x^2 - 4x = 0$

Donc : $(x=0 \text{ ou } x=2)$ et $y = x$

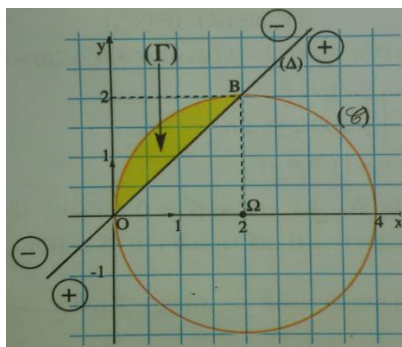
Donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points : $O(0;0)$ et $B(2;2)$

4)b)
$$\frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ (x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

L'inéquation : $(x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)

Et L'inéquation : $x - y \leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ)

Voire la figure ci-dessus :



Exercice2 : le plan (P) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$

1) Montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Solution : 1) on a : $\vec{AB}(1;-3)$ et $\vec{AC}(-1;-7)$: $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1) Soient $I(\frac{7}{2}; \frac{5}{2})$ et $J(3;-1)$ le milieu respectivement du segment : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par I et \vec{AB} un vecteur normal a (D)

$$M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right) - 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$$

Donc : (D) : $x - 3y + 4 = 0$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et \overrightarrow{BC} un vecteur normal a (Δ)

$$M(x; y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$$

Donc : $(\Delta) : x + 2y - 1 = 0$ (après simplifications)

soit Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (D)

$$\text{on va donc résoudre le système : } \begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $\Omega(-1; 1)$ donc $\Omega(-1; 1)$ est le centre du cercle circonscrit du

triangle ABC et le rayon est : $r = A\Omega = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = 5$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$

$$(C) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$$

Exercice 3: Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. (C_m) l'ensemble des points

$M(x; y)$ du plan tel que : $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0$ avec m Paramètre réel

1) Déterminer l'ensemble (C_1)

2) a) Montrer que $\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$ (C_m) est un cercle dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) Déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) Montrer que tous les cercles (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0); (C_2); (C_3)$

3) a) Montrer que la droite $(\Delta) : x = 1$ est tangente a toutes les cercles (C_m)

3) b) Soit $m > \frac{-3}{2}$ et $m \neq 1$ et le point $A(0; 1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des cercles (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux cercles (C_m)

Solution : 1) (C_1) ? Pour $m = 1$ on a : $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ et } y+1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=-1$$

Donc : (C_1) est le point $E(1; -1)$

2) a) $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \Leftrightarrow (x-m)^2 + (y+1)^2 = (m-1)^2$

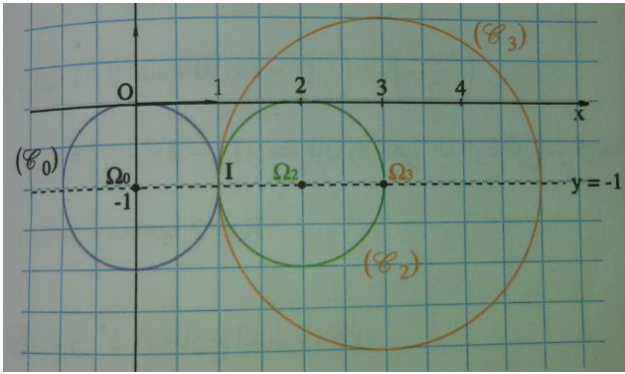
Donc : (C_m) est un cercle de centre $\Omega_m(m; -1)$ et de rayon $R_m = |m-1| \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) On pose : $x = m$ et $y = -1$ avec $m \in \mathbb{R} - \{1\}$ on a donc : l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R} - \{1\}$ est la droite d'équation : $y = -1$ privé du point $E(1; -1)$

2) b) $I(a; b) \in (C_m) \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ma + 2b + 2m = 0 \Leftrightarrow m(2-2a) + a^2 + b^2 + 2b = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a=0 \\ a^2+b^2+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \text{ et } b=-1 \text{ Donc : tous les cercles } (C_m) \text{ passent par un point fixe } I(1; -1)$$



3) a) L'équation de (Δ) est : $x + 0y - 1 = 0$

$$\text{Et } d(\Omega_m, (\Delta)) = \frac{|m - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |m - 1| = R_m$$

Donc : la droite (Δ) est tangente à toutes les cercles (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

3) b) On a : $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 2m + 3$

Et puisque : $m > \frac{-3}{2}$ alors : $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m > 0$ donc A est à l'extérieur des cercles (C_m)

$$\text{Montrons que : } d(\Omega_m, (AI)) = \frac{|2m - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} R_m$$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux cercles (C_m) car : $\frac{2}{\sqrt{5}} R_m \neq R_m$

Exercice 1 : Déterminer les ensembles :

$$(\Gamma_1) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$$

$$(\Gamma_2) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$$

Exercice 1 : Soient les points $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ et $C(5, -2)$

1) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés

2) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC .

Exercice 2 : Soit l'ensemble :

$$(C_m) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\} \text{ où } m \text{ est un réel.}$$

1) Montrer que pour tout m dans \mathbb{R} , l'ensemble (C_m) est un cercle et déterminer ses éléments.

2) Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (C_m) .

3) Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit \mathbb{R}

4) a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1, 2)$ appartient-il à (C_m)

b) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (C_m)$

5) Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (C_m)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

