1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

http://www.xriadiat.com

PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique (1)

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Définitions : Soit $B(\vec{i};\vec{j})$ une base de V_2.

1) La base B est dite **orthogonale** si $\vec{i}.\vec{j}=0$

2) La base B est dite **normée si** $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$

3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.

4)Soit O un point du plan et $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan ($\mathcal{P}$)

On dit que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $B(\vec{i};\vec{j})$) associé à $\mathcal{R}$ est orthonormée.

On pose : $\vec{i}=\overrightarrow{0I}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{0J}$

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

Soit $B(\vec{i};\vec{j})$ une base orthonormée de V_2.

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$

Et d'après la bilinéarité du produit scalaire on a : $\vec{u}.\vec{v}=xx'\vec{i}\vec{i}+yy'\vec{j}\vec{j}$ car $\vec{i}.\vec{j}=0$

Donc : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ car : $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$

On a donc la propriété suivante :

Propriété : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i};\vec{j})$

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a :

1) $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

2) $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

3) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exercice 01 : dans Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;-3)$ et $B(3;7)$ et $C(-3;1)$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C

2) Calculer la surface du triangle ABC

Solution : 1)

Methode1 **:** $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$ et $\overrightarrow{AB}(2;10)$

$$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+10^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$$

$$AC=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

Puisque : $AC^2+BC^2=32+72=104$ et $AB^2=104$

Donc : $AC^2+BC^2=AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

Methode2 : $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$

Donc : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC}=24-24+0$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2) Puisque le triangle ABC est rectangle en C alors : $S=\frac{1}{2}CA\times CB=\frac{1}{2}4\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=24$

Exercice 02 : Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$

Considérons la droite $(D):2x-y+1=0$ et N un point sur la droite (D) d'abscisse α.

1) Déterminer les coordonnées de N.

2) Déterminer la distance ON.

3) Déterminer pour quelle valeur de α la distance ON est minimale.

Solution :1)

1)Soient $N(\alpha;y_N)$: $N(\alpha;y_N)\in(D)\Leftrightarrow 2\alpha-y_N+1=0\Leftrightarrow 2\alpha+1=y_N$

Donc : $N(\alpha;2\alpha+1)$

2) Détermination de la distance ON

$$ON=\sqrt{(\alpha-0)^2+(2\alpha+1-0)^2}=\sqrt{\alpha^2+(2\alpha+1)^2}=\sqrt{\alpha^2+4\alpha^2+4\alpha+1}=\sqrt{5\alpha^2+4\alpha+1}$$

3) Détermination de valeur de α pour que la distance ON soit minimale.

$$f(\alpha)=\sqrt{5\alpha^2+4\alpha+1} \ : \ f'(\alpha)=\frac{(5\alpha^2+4\alpha+1)'}{2\sqrt{5\alpha^2+4\alpha+1}}=\frac{10\alpha+4}{2\sqrt{5\alpha^2+4\alpha+1}}$$

$$f'(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{10\alpha+4}{2\sqrt{5\alpha^2+4\alpha+1}}=0\Leftrightarrow10\alpha+4=0\Leftrightarrow\alpha=-\frac{4}{10}=-\frac{2}{5}$$

La distance ON est minimale pour : $\alpha=-\frac{2}{5}$

III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

1) L'expression de cos :

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$

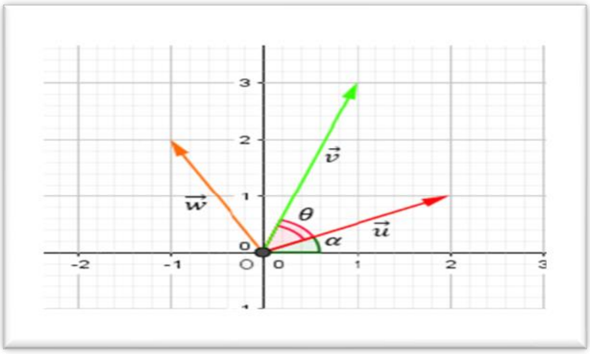
Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2 ; on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})=xx'+yy'$

Par suite : $\boxed{\cos(\vec{u};\vec{v})=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}}$

2) L'expression de sin :

2.1 L'écriture trigonométrique d'un vecteur.

L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$



$\vec{u}(x;y)$ et α la mesure da l'angle **polaire** $\left(\vec{i};\vec{u}\right)$

Puisque $\vec{i}(1;0)$ alors : $\vec{u}\cdot\vec{i}=x$ et puisque $\vec{j}(0;1)$ alors $\vec{u}\cdot\vec{j}=y$

D'autre part: $\vec{u}\cdot\vec{i}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{i}\|\cos\left(\vec{u};\vec{i}\right)=\|\vec{u}\|\cos\alpha$ et $\vec{u}\cdot\vec{j}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{j}\|\cos\left(\vec{u};\vec{j}\right)=\|\vec{u}\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$\vec{u}\cdot\vec{j}=\|\vec{u}\|\sin\alpha$

On peut conclure que : $\begin{cases} x=\|\vec{u}\|\cos\alpha \\ y=\|\vec{u}\|\sin\alpha \end{cases}$ Et par suite: $\vec{u}=\|\vec{u}\|\cos\alpha\vec{i}+\|\vec{u}\|\sin\alpha\vec{j}=\|\vec{u}\|\left(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}\right)$

Cette écriture s'appelle l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{u}$

2.2 L'expression de sin :

$\vec{u}(x;y)$ et α la mesure da l'angle polaire $\left(\vec{i};\vec{u}\right)$ et $\vec{w}$ le vecteur tel que : $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$ et $\left(\vec{u};\vec{w}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'après l'écriture trigonométrique du vecteur $\vec{w}$ on a : $\vec{w}=\|\vec{w}\|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\|\vec{w}\|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$

$\vec{w}=-\|\vec{w}\|\sin\alpha\vec{i}+\|\vec{w}\|\cos\alpha\vec{j}=-\|\vec{u}\|\sin\alpha\vec{i}+\|\vec{u}\|\cos\alpha\vec{j}$ (car : $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$) $\vec{w}=-y\vec{i}+x\vec{j}$

Par suite $\vec{w}(-y;x)$

D'où on peut conclure que : $\vec{v}\cdot\vec{w}=-x'y+xy'$ et on a : $\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cos\theta$

où : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\theta[2\pi]$ Ce qui nous permet de confirmer que : $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta=-x'y+xy'$

et donc : $\sin\theta=\dfrac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\dfrac{\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

Théorème : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

$$\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta=\frac{xy'-x'y}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{\det\left(\vec{u};\vec{v}\right)}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Exercice2 : Dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ direct

Considérons les points $A(5;0)$; $B(2;1)$ et $C(6;3)$.

1) Calculer : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) En déduire la nature du triangle ABC

3) En déduire une mesure des l'angles : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)$.

Solution : 1) On sait que : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-3\times1+1\times3=-3+3=0$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{10}$

$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{0}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=0$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{-10}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-1$

2) On a : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ et $AB=AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

3) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$ car : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$ et $\sin\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-1$ et $\left(\overline{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)=\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

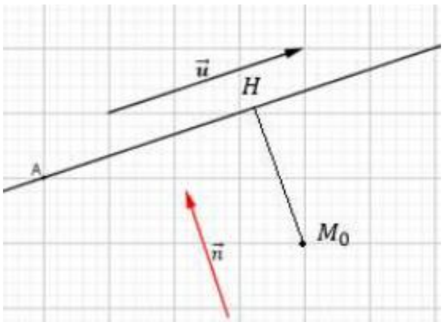
On a : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right)=\dfrac{-\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]=-\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

1) Vecteur normal sur une droite.

Définition : Soit $D\left(A;\vec{u}\right)$ la droite passante par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal à $\vec{u}$ s'appelle un vecteur normal sur la droite $(\boldsymbol{D})$.



Remarque : Si $\vec{n}$ est normal sur une droite (D) ; Tout Vecteur non nul colinéaire avec $\vec{n}$ est aussi Normal sur la droite (D).

Si (D): $ax + by + c = 0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite (D), et le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est non nul et orthogonal a $\vec{u}$ donc normal sur la droite (D).

2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Soient $A(x_A;y_A)$ un point donné, et $\vec{v}(a;b)$ un vecteur non nul. Soit (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{v}$ comme vecteur normal.

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{v}=0\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0\Leftrightarrow ax+by-(ax_A+by_A)=0$

Propriété : Soient $A(x_A;y_A)$ un point donné, et $\vec{n}(a;b)$ un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui admet $\vec{n}$ comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

(D): $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

Exercice : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Solution : On a (D) qui passe $A(0;1)$ et $\vec{n}(2;1)$ un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est : $2(x-0)+1(y-1)=0$

Donc : (D) : $2x+y-1=0$

Exercice4 : Donner un vecteur normal à la droite (D) dans les cas suivants :

1) (D) : $x-2y+5=0$ 2) (D) : $2y-3=0$ 3) (D) : $x-1=0$

Solution : un vecteur normal à la droite (D) d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$ et $\vec{n}(a;b)$

1) $(D):x-2y+5=0$: $\vec{n}(1;-2)$ un vecteur normal

2) $(D):0x+2y-3=0$: $\vec{n}(0;2)$ un vecteur normal

2) $(D):1x+0y-1=0$: $\vec{n}(1;0)$ un vecteur normal

Exercice : Dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(-3;0)$ et $B(3;0)$ et $C(1;5)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) passant par C

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB) passant par C

Solution : 1) Soit M un point du plan $(\mathcal{P})$

$M\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 6(x-1)-(y-5)=0\Leftrightarrow 6x-y-1=0$

Donc : $(D):6x-y-1=0$

1) Soit $M(x;y)$ un point du plan $(\mathcal{P})$

$M\in(\Delta)\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}=0$ Avec $\vec{n}$ un vecteur normal a la droite (AB)

Le vecteur : $\overrightarrow{AB}(6,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et on a : $\vec{n}(1,6)$

On a donc : $M\in(\Delta)\Leftrightarrow(x-1)+6(y-5)=0$

$\Leftrightarrow x+6y-31=0$ Donc : $(\Delta):x+6y-31=0$

Exercice : Dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ **Exercice6 :** Dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;2)$; $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) médiatrice du segment $[AB]$

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Solution : 1) $\overrightarrow{AB}(a,b)$ avec $(D)/ax+by+c=0$ un vecteur normal a (D)

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ Donc : $(D)/-3x+y+c=0$

Or $I\in(D)$ I est le milieu du segment$[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

Donc : $-3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-4$

Par suite : $(D)/-3x+y-4=0$

2)(Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire à (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(2,1)$ un vecteur normal a (Δ) donc : $(\Delta)/2x+y+c=0$

On a : $A\in(\Delta)$ donc : $2\times1+2+c=0\Leftrightarrow c=-4$

Donc : $(\Delta):2x+y-4=0$

3) Droites perpendiculaires

Proposition : Le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère les deux droites : $(D):ax+by+c=0$ et $(D'):a'x+b'y+c'=0$

$(D)\perp(D')\Leftrightarrow\vec{n}\perp\vec{n'}\Leftrightarrow aa'+bb'=0$ Avec $\vec{n}$ le vecteur normal de (***D***) et $\vec{n}'$ le vecteur normal de (***D'***)

Exercice : (D) $2x+3y-1=0$ et (D') $\frac{3}{2}x-y+4=0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Solution :

$\vec{n}(2;3)$ est un vecteur normal de (D)

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2};-1\right)$ est un vecteur normal de (D')

$\vec{n}\bullet\vec{n'}=2\times\frac{3}{2}+3\times(-1)=3-3=0$ Donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$

Par suite : $(D)\perp(D')$

4) Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition : Soient (D) une droite et M_0 un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est la distance M_0H où H est la projection orthogonal de M_0 sur (D). On la note : $d(M_0;(D))$

Remarque : La distance d'un point M_0 à une droite (D) est la plus petite distance de M_0 à un point M de (D) $d(M_0;(D))=\min\limits_{M\in(D)}(M_0M)$

Preuve : Soit la droite (D): $ax+by+c=0$ et $M_0(x_0;y_0)$;Soit H la projection orthogonale de M_0 sur (D), $\vec{n}(a;b)$ est normal sur (D).

On a pour tout point $A(x_A;y_A)$ de la droite(D) : $\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}=\left(\overrightarrow{M_0H}+\overrightarrow{HA}\right).\vec{n}=\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}+\overrightarrow{HA}.\vec{n}=\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}$

Donc : $\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}=\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}$

On conclue que $\left|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}\right|=\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|$ par suite : $\left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|\left\|\vec{n}\right\|=\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|$ et finalement : $M_0H=\frac{\left|\overrightarrow{M_0A}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

En passant à l'expression analytique : $\vec{n}(a;b)$ et $\overrightarrow{M_0A}(x_A - x_0; y_A - y_0)$

par suite : $M_0H = \dfrac{|a(x_A - x)_0 + b(y_A - y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$M_0H = \dfrac{|ax_A - ax_0 + by_A - by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|ax_A + by_A - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ Or $A \in (D) \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0 \Leftrightarrow ax_A + by_A = -c$

D'où $M_0H = \dfrac{|-c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Théorème : Soient la droite (D) : $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0; y_0)$ un point dans le plan.

La distance du point M_0 à la droite (D) est : $\boxed{M_0H = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

Exercice : Soient la droite (D) d'équation : $(D): 3x + 4y + 5 = 0$

1) Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)

2) Calculer La distance du point O à la droite (D)

3) Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Solution :1) Puisque H est la projection orthogonale de O sur (D) alors H est le point d'intersection de la droite (D)et la droite (Δ) qui passe par O et perpendiculaire a (D) on va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} (D): 3x + 4y + 5 = 0 \\ (\Delta): 4x - 3y = 0 \end{cases}$ On trouve : $x = \dfrac{-3}{5}$ et $y = \dfrac{-4}{5}$ donc $H\left(\dfrac{-3}{5}; \dfrac{-4}{5}\right)$

Autre méthode : Soit $H(x_H; y_H)$ on a : $H \in (D) \Leftrightarrow 3x_H + 4y_H + 5 = 0$

$\overrightarrow{OH}$ est normal a la droite (D) donc colinéaire avec : $\vec{u}(3;4)$

Donc : $\exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{OH} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3k \\ y_H = 4k \end{cases}$

Pour déterminer x_H et y_H on va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} (1)\, x_H = 3k \\ (2)\, y_H = 4k \\ (3)\, 3x_H + 4y_H + 5 = 0 \end{cases}$

On remplace (1) et (2) dans (3) on trouve : $k = \dfrac{-1}{5}$ Donc : $\begin{cases} x_H = \dfrac{-3}{5} \\ y_H = \dfrac{-4}{5} \end{cases}$

2) $d(O;(D)) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|3\times 0 + 4\times 0 + 5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{5}{5} = 1$

3) O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Donc : H est le milieu du segment $[OO']$

Donc : $\overrightarrow{O'H} = -\overrightarrow{OH}$ on pose : $O'(x;y)$

Donc : $\begin{cases} \frac{-3}{5} - x = \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} - y = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases}$ Donc : $O'\left(-\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)$

V) L'INTERPRETATION ANALYTIQUE DE L'INEGALITE DE CAUCHY-SCHWARZ

Activité 1: Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et le trinôme $f(x) = \left(x\vec{u} + \vec{v}\right)^2$

1) Développer $f(x)$.
2) Déterminer le signe de $f(x)$.
3) Déterminer le discriminant de $f(x)$.
4) En déduire que pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} \leq \left|\vec{u}.\vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$
5) Quand est ce qu'on a l'égalité ?

Activité 2 : On sait que pour trois points donnés dans le plan on a : $MA + MB \geq AB$ le but de cette activité c'est de démontrer ce résultat.

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

1) Développer $(\vec{u} + \vec{v})^2$
2) En utilisant l'inégalité précédente montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
3) Quand est ce qu'on a l'égalité ?

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

a) Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}.\vec{v} \leq \left|\vec{u}.\vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$

b) L'égalité est vérifiée si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

L'inégalité triangulaire.

a) Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

b) l'égalité est vérifié si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Propriétés : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ on a

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\vec{u}.\vec{v} \leq \left|\vec{u}.\vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \Leftrightarrow xx' + yy' \leq \left|xx' + yy'\right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}$

2) L'inégalité triangulaire : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien