Cours BARYCENTRE avec **Exercices avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB

http://www.xriadiat.com

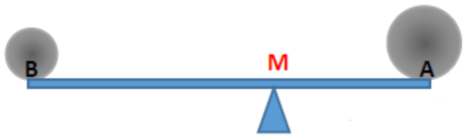
BARYCENTRE

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

I) ACTIVITES

Activité 1 : Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur $1m$ on considère deux boules métalliques de 200 g en A et de 300 g en B. M un point sur la barre.
Déterminer la position de M sachant que le système et en équilibre.



Solution : Le système et en équilibre si et seulement si : $200\overrightarrow{MA}+300\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

$200\overrightarrow{MA}+300\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -5\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}}$ et $M\in(AB)$

$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AM}\right\|=\left\|\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\right\| \Rightarrow AM=\frac{3}{5}AB=\frac{3}{5}\times 1m=\frac{3}{5}m$

Activité 2 : Soit ABC un triangle rectangle en A et $AC = 2AB$.

1) Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que : $2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

2) Tracer le point G.

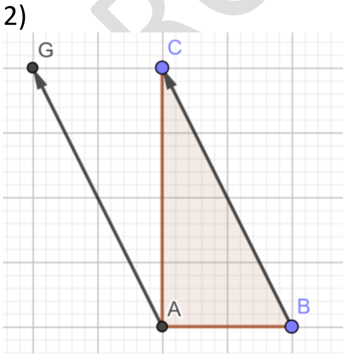
3) Si le plan est rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)$ où I est milieu de $[AC]$, quels seront les coordonnées du point G.

Solution : 1) $2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{CG}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG}-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}\right)+2\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AG}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CA}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow G=t_{\overrightarrow{BC}}(A)$

2)



2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-1\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AI}$ ainsi : $I(-1;2)$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI}\right)$

Activité 3 : Soit $(A_i)_{1\le i\le 4}$ une famille de 4 points, et $(\alpha_i)_{1\le i\le 4}$ 4 réels dont la somme est non nulle.

Montrer que l'application : $f:P\to V_2$ tel que : $f(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ est une bijection :

(L'application f s'appelle l'application de Leibniz)

(Wilhelm Leibniz 1646-1716)

Solution : a) Montrons que l'application : $f: P \to V_2$ est injective

Soient : $M \in (P)$ et $M' \in (P)$ tel que : $f(M) = f(M')$

$$f(M) = f(M') \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{M'A_i}\right) = \vec{0}$$

$$f(M) = f(M') \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{A_iM'} + \overrightarrow{MA_i}\right) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \text{ Car : } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

$$f(M) = f(M') \Rightarrow M = M'$$

D'où : l'application : $f: P \to V_2$ est injective

a) Montrons que l'application : $f: P \to V_2$ est surjective

Soient : $\vec{u} \in V_2$ existe il un point $M \in (P)$ tel que : $f(M) = \vec{u}$?

$$f(M) = \vec{u} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{u} \Leftrightarrow \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{MA_3} + \alpha_4 \overrightarrow{MA_4} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}\right) + \alpha_3 \left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_3}\right) + \alpha_4 \left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1A_3} + \alpha_4 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_4 \overrightarrow{A_1A_4} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \overrightarrow{MA_1} = \vec{u} - \left(\alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1A_3} + \alpha_4 \overrightarrow{A_1A_4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA_1} = \frac{\vec{u} - \left(\alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1A_3} + \alpha_4 \overrightarrow{A_1A_4}\right)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1M} = \frac{\alpha_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1A_3} + \alpha_4 \overrightarrow{A_1A_4} - \vec{u}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Car : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ D'où : l'application : $f: P \to V_2$ est injective car il existe un point $M \in (P)$ tel que :

$f(M) = \vec{u}$: Conclusion : l'application : $f: P \to V_2$ tel que : $f(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est une bijection

II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

1) Vocabulaires

Définitions : Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un point pondéré.
Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

2) Barycentre de deux points pondérés.

2.1 Définitions.

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$
L'application $f_2: P \to V_2$ tel que : $f_2(M) = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}$ est une bijection et il existe un et un seul point G qui vérifie $f_2(G) = \vec{0}$

Preuve : f_2 est l'application de Leibniz pour deux points

On a : $\vec{0} \in V_2$ donc : $\exists! M \in (P) / f_2(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists! M \in (P) / \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Définition : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré
tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie : $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$
On écrit : $G = Bar\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$

2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
On a donc : $\alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$ et par suite : pour tout réel k non nul on a : $k\alpha \overrightarrow{AG} + k\beta \overrightarrow{BG} = \vec{0}$
et donc $G = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Propriété : a) Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b) Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

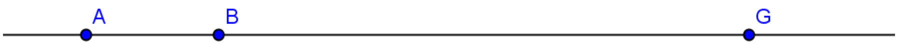
Construction :

• **Exemple1 :** Construire $G = Bar\ \{(A, 4); (B, -5)\}$

$G = Bar\ \{(A, 4); (B, -5)\}$ donc : $4\overrightarrow{AG} - 5\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$$4\overrightarrow{AG} + 5\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB}$$

Donc le point $G \in (AB)$



• **Exemple2 :** Construire $G = Bar\ \{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

$G = Bar\ \{(A, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\sqrt{2}\right))\}$

Donc : $G = Bar\ \{(A, 2); (B, -1)\}$

• Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

On a donc par suite : $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

Soit M est un pont quelconque dans le plan (P) on a donc :

$$\alpha\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}\right) + \beta\left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} = \vec{0}$$

D'où : on conclut que : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MB}$

Propriété : Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. Pour tout point M du plan (P) on a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MB}$

Ou $\boxed{(\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}}$

Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre.

Propriété : Si $G = Bar\ \{(A, \alpha)\ ; (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

Preuve : Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant A = M dans la propriété :

On aura : $\overrightarrow{AG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite : les points A, B et G sont alignés.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OB}$

et donc on a les coordonnées de G : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$

Preuve : (Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre en posant A = O)

Exemples : 1) Dans le plan (P) rapporté à un repère $R\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$; soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, -5)\}$

Solution : On a : $\begin{cases} x_G = \dfrac{-x_A + 5x_B}{4} \\ y_G = \dfrac{-y_A + 5y_B}{4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G = \dfrac{17}{4} \\ y_G = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Donc : $G\left(\dfrac{17}{4}; \dfrac{3}{4}\right)$

Exercice1 : soit ABC un triangle et soit :

Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$

Solution : On a : I = Bar {(B, 4); (C, -3)}

Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre en posant : $M = A$

$(4+(-3))\overrightarrow{MI} = 4\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

Donc : $(4+(-3))\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ et par suite dans le repère $R\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ on aura : $I(4;-3)$

Exercice2 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$ et $E \notin (AB)$ et G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$

1) Montrer que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) En déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

Solution : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\left(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow -1\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{FG} = \vec{0}$

Donc : $-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ par suite : G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) On a : G le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G \in (EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc : $G \in (AB)$

Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

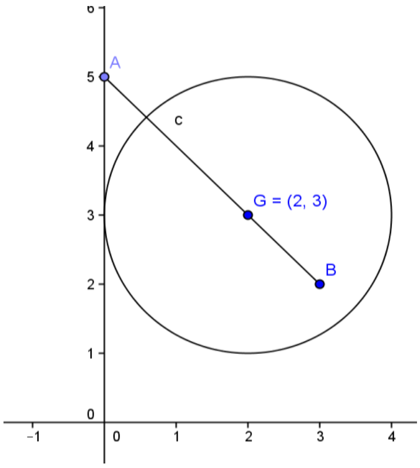
Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$ et soit G = Bar {(A, 1); (B, 2)}

1) Déterminer les coordonnées de G

2) Déterminer et dessiner l'ensemble suivant : $(C) = \left\{M \in (P) / \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6\right\}$

Solution : $\begin{cases} x_G = \dfrac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{5+4}{3} = 3 \end{cases}$ donc : $G(2;3)$



D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6cm \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm$

$\Leftrightarrow |3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm \Leftrightarrow 3MG = 6cm \Leftrightarrow MG = 2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon :

$r = 2cm$

3) Barycentre de trois points pondérés

Propriété : Soit {(A, α); (B, β); (C, γ)} un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ l'application :

$f_3 : P \to V_2$ tel que : $f_3(M) = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_3(G) = \vec{0}$ c'est à dire : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Preuve : f_3 est l'application de Leibniz pour trois points

Propriété : Propriété caractéristique du barycentre

Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$; si M est un pont quelconque dans le plan (P)

On a : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$ donc : $\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}}$

Preuve : Même démonstration que dans le cas précèdent.

Construction :

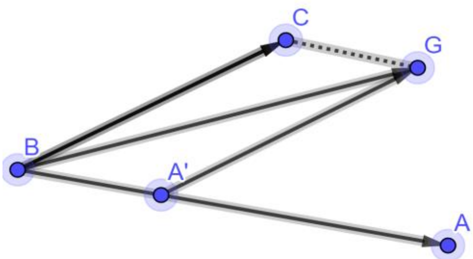
• **Exemple :**

1) Construire $G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$

$G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$(1+(-1)+3)\overrightarrow{MG} = 1\overrightarrow{MA} + (-1)\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$

On pose : $M = B$ on aura : $3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

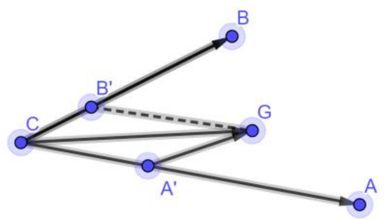


2)Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :$(4+1/2-3)\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MA} + 1/2\,\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

On pose : $M = C$ on aura : $\frac{3}{2}\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{8}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$$2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}\right) - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$



Exercice 4 : Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB}$

Montrer que G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ et construire le point G

Solution :

$$2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}\right) - 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

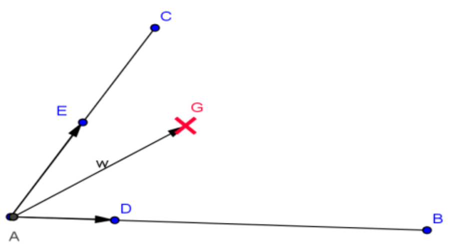
$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Donc G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

On a :® $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$



Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ des points du plan et $G = Bar\ \{(A,\ \alpha)\ ;\ (B,\ \beta)\ ;\ (C,\ \gamma)\}$

On a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$ et donc on a les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

Propriété : Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :

$Bar\ \{(A,\ \alpha)\ ;\ (B,\ \beta);\ (C,\ \gamma) = Bar\{(A,\ k\alpha);\ (B,\ k\beta);\ (C,\ k\gamma)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice : Soit $G = Bar\ \{(A,\ \alpha)\ ;\ (B,\ \beta)\ ;\ (C,\ \gamma)\}$ où $\alpha + \beta \neq 0$ et $G' = Bar\ \{(A,\ \alpha);\ (B,\ \beta)\}$

Montrer que $G = Bar\ \{(G',\ (\alpha+\beta))\ ;\ (C,\ \gamma)\}$

Propriété : Propriété d'associativité

Si $G = Bar\ \{(A,\ \alpha);\ (B,\ \beta);\ (C,\ \gamma)$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $G' = Bar\{(A,\ \alpha);\ (B,\ \beta)\}$

Alors : $G = Bar\ \{(G',\ (\alpha+\beta))\ ;\ (C,\ \gamma)\}$

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

Exercice 5 : On utilisant La propriété d'associativité : construire le barycentre G du système pondéré $\{(A,\ 2);\ (B,\ -3);\ (C,\ 5)\}$

Solution : Soit E = $Bar\{(A,\ 2);\ (B,\ -3)\}$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$

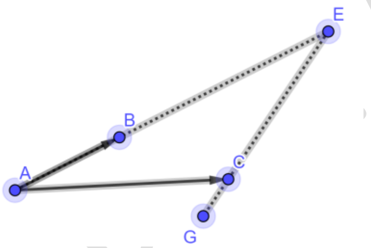
On pose : $M = A$ on aura : $-\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$

d'après la Propriété d'associativité on a : G = Bar\{(E, -1); (C, 5)\}

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $4\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{ME} + 5\overrightarrow{MC}$

On pose : $M = E$ on aura : $4\overrightarrow{EG} = 5\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$



Cas particulier : Si les poids α; β et γ sont égaux le barycentre de $\{(A,\ \alpha);\ (B,\ \alpha);\ (C,\ \alpha)\}$

S'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC.

Exercice 6 : Soit ABC un triangle.et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Monter que G est le barycentre de :$(A;1)$ et $(I;2)$

Solution : G le centre de gravité du triangle ABC

Donc G est le barycentre de : $\{(A,\ 1);\ (B,\ 1);\ (C,\ 1)\}$

I le milieu du segment $[BC]$ donc I est le barycentre de : $\{\ (B,\ 1);\ (C,\ 1)\}$

D'après la Propriété d'associativité on a : G est le barycentre de : { (I, 2); (A, 1)}

Exercice7 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose : $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

1) Réduire l'écriture de $\vec{V}$ et monter que $\vec{V}$ ne dépend pas du point M

2) Soit K = Bar \{(C, -3); $(B,\ 1)$\} : montrer que : $\vec{V} = 2\overrightarrow{KA}$

3) Soit G = $Bar\ \{(A,\ 2);\ (B,\ -1);\ (C,\ -3)\}$: montrer que : Pour tout point M on a :

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{GM}$

4) En déduire l'ensemble des points M tel que : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : 1) $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$\vec{V}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{V}$ ne dépend pas du point M

2) On a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ Pour tout point M donc si : $M=K$ on aura :

$2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ et on a : K = Bar{(C, -3); (B, 1)} donc : $\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc : $2\overrightarrow{KA}=\vec{V}$

3) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-3)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GM}$

4) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{GM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{KA}\right\| \Leftrightarrow 2GM=2KA \Leftrightarrow GM=KA$

Donc : l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon : $r=KA$

Exercice 8 : Soit ABC un triangle tel que : $AC=6cm$ et $AB=5cm$ et $BC=4cm$

a) Construire G le barycentre de : {(A, 1); (B, 2); (C, 1)}

b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AC$

c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : G est le barycentre de : {(A, 1); (B, 2); (C, 1)} donc G est le barycentre de : {(B, 2); (I, 2}

Avec : I est le milieu du segment $[AC]$: d'après La propriété d'associativité du barycentre

Donc : G est le milieu du segment $[BI]$

b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=AC \Leftrightarrow GM=\frac{AC}{4}=1.5$

Donc : l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=1.5cm$

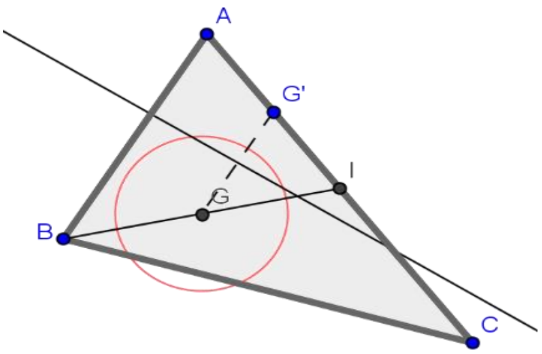
b) Soit G' est le barycentre de : {(A, 3); (C, 1)}

Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\forall M\in(P)$: $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG'}$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow 4MG=4MG'\Leftrightarrow MG=MG'$

Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$ et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



5) Barycentre de quatre points pondérés

Propriété : Soit $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$
l'application : $f_4 : P \to V_2$ tel que : $f_4(M)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}$ est une bijection.

Il existe un et un seul point G qui vérifie $f_4(G)=\vec{0}$ c'est à dire : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Preuve : f_4 est l'application de Leibniz pour quatre points

Propriété : Soit $\Sigma=\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$ et $G=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ si M est un point quelconque dans le plan (P)

On a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{s}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{s}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{s}\overrightarrow{MC}+\frac{\delta}{s}\overrightarrow{MD}$ où $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Preuve : Même démonstration que dans les cas précédents.

Propriété : Le plan (P) et rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$ des points du plan

$G=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$:on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{s}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{s}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{s}\overrightarrow{OC}+\frac{\delta}{s}\overrightarrow{OC}$

Et donc on a les coordonnées de G : $\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{s} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{s}\end{cases}$ où $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Propriété : Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul :
$Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}=Bar\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma);(D,k\delta)\}$:pour $k\neq 0$
Propriété : Si $G=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ avec $\alpha+\beta\neq 0$ et $\gamma+\delta\neq 0$
Si $G'=Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ et $G''=Bar\{(C,\gamma);(D,\delta)\}$
Alors $G=Bar\{(G',(\alpha+\beta));(G'',\gamma+\delta)\}$
Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

Exercice9 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient $A(-1;1)$; $B(0;2)$; $C(1;-1)$; $D(1;0)$ et soit $G=Bar\{(A,1);(B,2)\}$

1)Déterminer les coordonnées de $K=Bar\{(A,2);(B,3)\}$

2)Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC

3)Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$; $(B;3)$; $(C;1)$ et $(D;-1)$

Solution :1) $\begin{cases} x_K=\dfrac{-2+0}{5}==\dfrac{-2}{5} \\ y_K=\dfrac{2+6}{5}=\dfrac{8}{5}\end{cases}$ donc $K\left(-\frac{2}{5};\frac{8}{5}\right)$

2) les coordonnées de L sont : $\begin{cases} x_L=\dfrac{1x_A+1x_B+1x_C}{1+1+1} \\ y_L=\dfrac{1y_A+1y_B+1y_C}{1+1+1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=\dfrac{1\times(-1)+1\times 0+1\times 1}{1+1+1}=0 \\ y_L=\dfrac{1\times 1+1\times 2+1\times(-1)}{1+1+1}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Donc : $L\left(0;\frac{2}{3}\right)$

3) $\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{2\times x_A+3\times x_B+1\times x_C+(-1)\times x_D}{5}=\dfrac{-2}{5} \\ y_G=\dfrac{2\times y_A+3\times y_B+1\times y_C+(-1)\times y_D}{5}=\dfrac{7}{5}\end{cases}$ Donc : $G\left(-\frac{2}{5};\frac{7}{5}\right)$

Application : $ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 2BC$
Construire le barycentre du système pondéré $\{(A, -2) ; (B, 3) ; (C, 1) ; (D, 1)\}$
Cas particulier : Si les poids α ; β et γ sont égaux le barycentre de :
$\{(A, \alpha) ; (B, \alpha) ; (C, \alpha) ; (D, \delta)\}$ s'appelle **le centre de gravité** du quadrilatère convexe $ABCD$
Exercice10 : Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe
Soit H le barycentre du système pondéré : {(A, 2) ; (B, 5); (C, -1) }
Soit K le barycentre du système pondéré :{(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}
Soit E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}
1)Montrer que : $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et Construire E
2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)} et Construire H
3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
b) En déduire que $(AK) \parallel (DH)$

Solution :1)on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a : $\overrightarrow{ME} = \frac{1}{4}\left(5\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)$

Pour : M=B on a : $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et on peut Construire E
2) on a : E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)} et $5 + (-1) = 4$
D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {(A, 2); (E, 4) }
et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré
{(A, 1) ; (E, 2)}
on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a : $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MA}\right)$

Pour : M=A on a : $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et on peut Construire E
3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système pondéré :
{(D, -6); (E, 4) } et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré :
{(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?
Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
Pour tout point M du plan (P) on a : $-\overrightarrow{MK} = -3\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME}$
Donc : $3\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{ME}$
Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
4) b) Pour tout point M du plan (P) on a : $3\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MA}$ et $3\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MK}$
Donc : $3\overrightarrow{DH} = 3\overrightarrow{MH} - 3\overrightarrow{MD}$: $3\overrightarrow{DH} = 3\left(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MD}\right)$
Donc : $3\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MK}$
Donc : $3\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AK}$ Donc : $(AK) \parallel (DH)$

Exercice11 : ABC un triangle ; I et J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{BC}$; $8\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB}$
1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$
2) le plan (P) est rapporté au repère : $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$
a) Déterminer les coordonnées du point J
b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)
c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.
Solution :1) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{BI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $A(0;0)$et $B(1;0)$ et $C(0;1)$

a) On a : $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ donc : $8\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{CA}$
Donc : $8\overrightarrow{AJ}=-7\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$ donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) La droite (IK) passe par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IK}$ et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc : $\begin{cases} x_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times1-\frac{3}{2}\times0}{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times0-\frac{3}{2}\times1}{-1}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et on a : $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ c'est à dire : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$ par suite : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est : $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+c=0$

$I\in(IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0\Leftrightarrow-\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0\Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$

Donc : (IK): $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0\Leftrightarrow15x-9y+21=0$

c) Pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J\in(IK)$

On a : $(IK):15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$ et on a : $15\times0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

Par suite : $J\in(IK)$ donc les points I ; J et K sont alignés.

Exercice12 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport a C et J le milieu du segment $[BC]$

1) Exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés à déterminer
2) Quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$?
3) Monter que les points I ; J et K sont alignés.

Solution :1)

• On a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$

• On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$

• On a : K le symétrique de A par rapport a C
Donc : $2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KA}$
Donc : $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$
Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) On a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc : $1\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K \in (IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice13 : ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[CD]$

M et N deux points tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1) Déterminer le barycentre des points pondérés : {(A, 3) ; (B, 1)} et {(A, 3) ; (D, 1)}

2) Soit G le barycentre des points pondérés : $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$

3) Monter que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1) on a : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ donc : $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$

De même on a : $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}$

Donc : $3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

2) Soit G le barycentre des points pondérés : $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G \in (JM)$

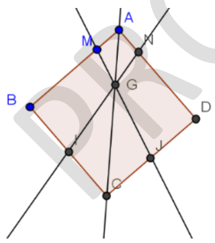
De même on a : I le milieu du segment $[BC]$ alors I est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G \in (NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD

Donc : H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$

Donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H \in [AC]$ donc $G \in (AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice14:

A et B deux points tel que : $AB = 4cm$ et soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 3$

1) Montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2) Soit G le barycentre des points pondérés : $(A;1)$;$(B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;-3)$

a) Montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$

b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

Solution :1) $M \in (F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

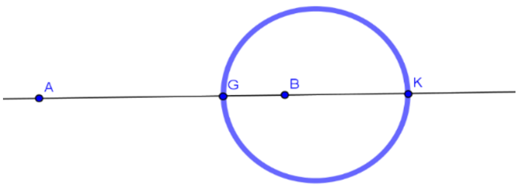
2)a) $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) = 0$

et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MK}$

Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MK} = 0$

Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MK} = 0$

2)b) D'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice15 : A et B deux points tel que : $AB = 4cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit : (E) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = 4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a) Montrer que : $H \in (E)$

b) Vérifier que : $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

c) Déterminer la nature de l'ensemble (E)

2) Soit : (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 - MB^2 = 8$

a) Montrer que : $\forall M \in (P)$ on a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB}$

b) En déduire que $(F) = (E)$ et le tracer

Solution :1)on a : H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH}$ donc : $\overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite : $\overrightarrow{IH} \bullet \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$

Donc : $H \in (E)$

b) $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \bullet \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

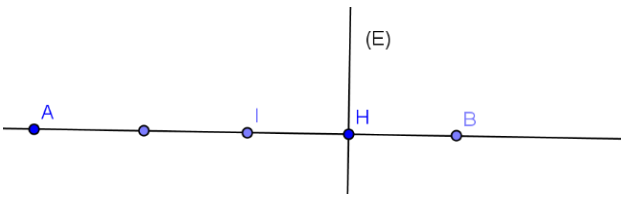
c) De b) on déduit que : (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

2)a) $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = 2\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB}$

Car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

2)b) $M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$

Donc $(F) = (E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



Exercice16 : A et B deux points tel que : $AB=3cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1) Soit : (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=9$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a) Monter que : $M\in(C)\Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$

b) Déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)

2) Soit : (C') l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{-5}{4}$

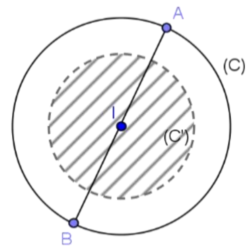
a) Montrer que : $M\in(C')\Leftrightarrow MI=1$

b) Déterminer la nature et tracer l'ensemble (C')

Solution : 1) on a : $MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=2MI^2+2IA^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$

Car : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}$

$M\in(C)\Leftrightarrow 2MI^2+\frac{AB^2}{2}=9\Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$



b) En déduit que (C) est le cercle de centre I et de rayon $r=\frac{3}{2}$

2) a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)=MI^2-\frac{AB^2}{4}$

Donc : $M\in(C')\Leftrightarrow MI=1$

2) b) En déduit que (C') est le cercle de centre I et de rayon $r=1$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien