Cours de 1ere Sciences math BIOF **PROF : ATMANI NAJIB**

FONCTIONS - *Généralités*

Leçon : FONCTIONS - Généralités

Présentation globale

1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions

1-1) Définition :

Une *fonction* est un procédé qui a un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y.

On note : $x \overset{f}{\mapsto} y = f(x)$ Ou encore : $f : x \mapsto y = f(x)$ Ou encore $y = f(x)$

- On dit que y est l'image de x par la fonction f
- On dit aussi que x est un antécédent de y par la fonction f

1-2) Exemples

Exemple1 : Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique

Comme par exemple : $f(x)=3x^3+9x^2+1$; $g(x)=\dfrac{3x^3+2x^2-1}{5x^2-4}$. ; $h(x)=\dfrac{2x-1}{5x-4}$; $l(x)=\sqrt{x}$; $R(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\tan x}$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique

Une fonction homographique s'écrit sous la forme : $h(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

l S'appelle la fonction racine carré

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple2 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=3x^2-1$

1)Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par f

2)Déterminer les antécédents éventuels de 2 par f ,

Réponses : 1) $f(1)=3\times1^2-1=3-1=2$; $f(\sqrt{2})=3\times(\sqrt{2})^2-1=6-1=4$ et $f(-1)=3\times(-1)^2-1=3-1=2$

2) $f(x)=2 \Leftrightarrow 3\times x^2-1=2 \Leftrightarrow 3\times x^2=2+1 \Leftrightarrow 3\times x^2=3 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$

Donc : les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

1-3) Domaine de définitions : activités

a) On considère la fonction définie par : $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle ou lesquelles n'a ou n'ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b) On considère la fonction définie par : $x \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle ou lesquelles n'a ou n'ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c) On considère la fonction définie par : $x \overset{h}{\longmapsto} \dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle ou lesquelles n'a ou n'ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Définition : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D_f

Exemple 1 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=3x^2-x+1$.
2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$
3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.
4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.
5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.
6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.
7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.
8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.
9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.
10) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$.
11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$.
12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.
13) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$.
14) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$.
15) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$.
16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$
17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$
18) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$
19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.
20) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-2\sqrt{x}-15}$

Solutions : 1) $f(x)=3x^2-x+1$

f Est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{2}=2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ (On dira aussi que : 2 est une valeur interdite pour la fonction f)

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-2=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x^2=2 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\right\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f=\{x\in\mathbb{R} / -3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -6 \Leftrightarrow x\leq \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x\leq 2$

Donc : $D_f = \left]-\infty;2\right]$

6) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$ On : $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

Donc : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc : $x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ et $x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-3x+1\geq 0\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $a=2$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

8) $f(x)=\sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1}\geq 0 \ et\ x+1\neq 0\right\}$

$-9x+3=0 \Leftrightarrow -9x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ et $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left]-1,\frac{1}{3}\right]$

9) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / -2x^2+x+3>0\}$

$-2x^2+x+3=0$: $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times 3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc : on a deux racines : $x_1=\frac{-1+5}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-1-5}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]$

10) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\right\}$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$: Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
Donc $D_f=\mathbb{R}$

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$: $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

Or on sait que $|x|\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0 \text{ et } x-1\neq 0\right\}$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2 \text{ et } x\neq 1\right\}$

Donc : $D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

13) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-x\geq 0 et x\neq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\leq 0 et x\neq 0\right\}$

Donc : $D_f=]-\infty,0[$

14) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/|2x-4|-|x-1|\neq 0\right\}$

$|2x-4|-|x-1|=0 \Leftrightarrow |2x-4|=|x-1| \Leftrightarrow 2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1 \Leftrightarrow x=3$ ou $2x+x=4+1$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $3x=5 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=\dfrac{5}{3}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{5}{3};3\right\}$

15) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq 0\right\}$

$2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

16) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$ $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0 \text{ et } x^2-x-6\neq 0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est $\Delta'=2^2-4\times(-2)\times 13=108$ et ses racines sont : $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme : x^2-x-6:
Le discriminant est $\Delta=(-1)^2-4\times(-6)\times 1=25$ et ses racines sont :

$x_1' = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2' = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1+5}{2} = 3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$D_f = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup \left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

17) $f(x) = \sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$ $\quad D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\geq 0\right\}$

$\Delta = b^2-4ac = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 - 4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta = 12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6} = 14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6} = 14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2} = \left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$ Donc : $14+4\sqrt{6} = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta = 14+4\sqrt{6} > 0$ donc :

$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1} = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$ et $x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $D_f = \left]-\infty;-2\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

18) $f(x) = \frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$: $\quad D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x^2+2|x|-3\neq 0\right\}$

$x^2+2|x|-3=0 \Leftrightarrow |x|^2+2|x|-3=0$ on pose $|x| = X$ donc l'équation devient : $X^2+2X-3=0$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et ses solutions sont : $X_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times1} = -3$ et $X_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times1} = 1$

Donc on a : $|x| = -3$ et $|x| = 1$

$|x| = -3$ n'a pas de solution

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Donc : $D_f = \mathbb{R}-\{-1;1\}$

19) $f(x) = \sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$:

$$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / 2x-1\geq 0 \ \ et \ \ 3-5x\geq 0\right\} = \left\{x\in\mathbb{R} / x\geq\frac{1}{2} \ \ et \ \ x\leq\frac{3}{5}\right\}$$

Donc $D_f = \left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$

20) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-2\sqrt{x}-15}$: $\quad D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x-2\sqrt{x}-15\neq 0 \ \ et \ \ x\geq 0\right\}$

$x-2\sqrt{x}-15=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2-2\sqrt{x}-15=0$

On pose : $\sqrt{x}=X$ donc l'équation devient : $X^2-2X-15=0$

Le discriminant est Δ = $(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$ et ses solutions sont : $X_1=\frac{2-\sqrt{64}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\frac{2+\sqrt{64}}{2\times 1}=5$

Donc on a : $\sqrt{x}=-3$ et $\sqrt{x}=5$

Mais : $\sqrt{x}=-3$ n'a pas de solution et $\sqrt{x}=5 \Leftrightarrow x=5$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\neq 5 \ et \ x\geq 0\}$

Donc : $D_f=[0;5[\cup]5;+\infty[$

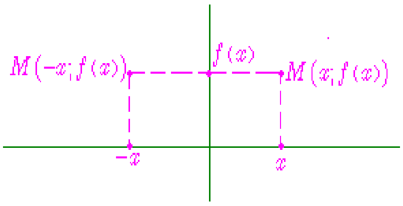
2) Fonctions paires et Fonctions impaires :

2.1 Ensemble de définition centrée : Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition : On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et seulement si : Pour tout réel x, si $x\in D_f$, alors : $-x\in D_f$

Exemples d'ensembles centrés	Exemples d'ensembles non centrés
$]-\infty,+\infty[$	$]0,+\infty[$
$\mathbb{R}$ * (ou $\mathbb{R}$ - {0})	$\mathbb{R}$ - {1}
$\mathbb{R}$ - {-1 ; 1}	$\mathbb{R}$ - {-1 ; 2}
$[-4;\ 4]$	$[-4;\ 3]$

2.2. Fonction paire : On dit qu'une fonction *f* est paire si et seulement si :

- ✓ Son ensemble de définition est centré
- ✓ Pour tout réel *x* de D_f on a : $f(-x)=f(x)$



Remarques :

- si *n* est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par : $f(x)=kx^n$ est paire.

(C'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)

- la fonction $x\mapsto |x|$ est une fonction paire,
- la fonction $x\mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

2.3. Fonction impaire : On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

- ✓ Son ensemble de définition est centré,
- ✓ Pour tout réel *x* de D_f on a : $f(-x)=-f(x)$

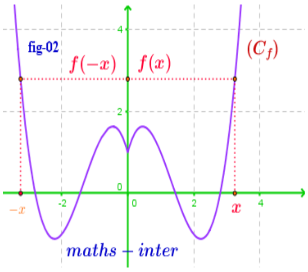
Remarques :

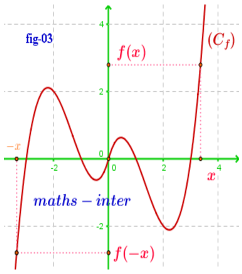
- Si *n* est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $f(x)=kx^n$ est impaire,
- la fonction $x\mapsto \sin(x)$ est impaire,
-la fonction $x\rightarrow \tan x$ est impaire,
-l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
-l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
-la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

2.4 le graphe et la parité de la fonction :

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Fonction paire **Fonction impaire**





Exemple 1 :

1) Soit f une fonction tq : $f(x)=3x^2-5$

Donc $D_f=\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=3(-x)^2-5=3x^2-5$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x)=\dfrac{3}{x}$

On a : $g(x)\in\mathbb{R}\iff x\neq 0$

Donc : $D_g=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $g(-x)=\dfrac{3}{-x}=-\dfrac{3}{x}$
  $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tel que : $h(x)=2x^3+x^2$

h est une fonction polynôme : donc un réel a toujours une image.

Donc $D_h=\mathbb{R}$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $h(-x)=2(-x)^3+(-x)^2=-2x^3+x^2\neq h(x)$
  $h(-x)=-(2x^3-x^2)\neq -h(x)$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tel que : $t(x)=\dfrac{x}{x-2}$

On a : $t(x)\in\mathbb{R}\iff x-2\neq 0\iff x\neq 2$

Donc $D_t=\mathbb{R}-\{2\}$

On a : $-2\in D_t$ mais : $-(-2)=2\notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport a O

Donc t est une fonction ni paire ni impaire,

Exemple 2 : Etudier la parité des fonctions suivantes définies par :

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$. 3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$. 4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 5) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$.

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$. 7) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$. 8) $f(x)=5-|x|-\sqrt{4-\cos x}$

Solutions :1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$

on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{-x}=-\frac{x^2-1}{x}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=(-x)^2+\frac{1}{-x}=x^2-\frac{1}{x}=\left(-x^2+\frac{1}{x}\right)$

  $f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- $f(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^2-1}=\frac{|x|}{x^2-1}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

$1-x^2=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel *x*, si $x\in[-1,1]$, alors $-x\in[-1,1]$

- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = \dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+5} = \dfrac{-2x^3}{x^2+5}$

  $f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2+4}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2+4 \geq 0\}$

Or on sait que $2x^2 \geq 0$ Pour tout réel *x*, donc $2x^2+4 \geq 0+4$ c'est-à-dire : $2x^2+4 \geq 4 \geq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = |-x| - \sqrt{2(-x)^2+4} = |x| - \sqrt{2x^2+4}$

  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$. $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ Donc $D_f = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$

On a $2 \in \mathbb{R}^+$ mais $-2 \notin \mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

8) $f(x) = 5 - |x| - \sqrt{4-\cos x}$ $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4-\cos x \geq 0\}$

On a : $x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc : $-1 \leq -\cos x \leq 1$ donc : $0 \prec 3 \leq 4-\cos x \leq 4$

$D_f = \mathbb{R}$ car : $0 \leq 4-\cos x$

- Pour tout réel *x*, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 5 - |-x| - \sqrt{4-\cos(-x)} = 5 - |x| - \sqrt{4-\cos x}$ car : $|-x| = |x|$ et $\cos(-x) = \cos x$

  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire

Exemple 3 : Soit la fonction définie par : $5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x$ Pour tout réel x

1)Montrer que f est une fonction impaire

2)Donner une expression de $f(x)$ Pour tout réel x

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$

On a $5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x$ (1) pour tout réel x

En remplaçant x par –x on trouve : $5f(-x) + f(x) = 2(-x)^3 - 3(-x)$

Donc : $5f(-x) + f(x) = -2x^3 + 3x$ (2)

(1) + (2) donne : $6\left(f(-x) + f(x)\right) = 0$ donc : $f(-x) + f(x) = 0$

Donc : $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc f est une fonction impaire

2)On a : $5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x$

Et puisque f est une fonction impaire donc : $5f(x) - f(x) = 2x^3 - 3x$

$$4f(x) = 2x^3 - 3x \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}}$$

Exemple 4 : Soit la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{|x|+1}{2|x|-3}$ et (C_f) la courbe de f dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Solution : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 2|x| - 3 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / |x| \neq \frac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire .

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$ alors $-x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

- $f(-x) = \frac{|-x|+1}{2|-x|-3} = \frac{|x|+1}{2|x|-3} = f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite la (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

3) Les variations d'une fonction numérique

3-1) Sens de variation d'une fonction : fonction croissante -décroissante -fonction constantes

Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire que f est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ $\left(f(x_1) \leq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

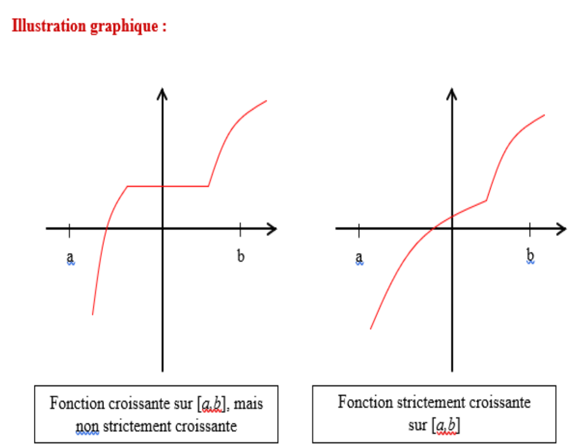
- Dire que f est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ $\left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire que f est constante sur I signifie que : Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Exemples :

1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 7x - 5$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $7x_1 \prec 7x_2$ car $7 \succ 0$

Donc $7x_1 - 5 \prec 7x_2 - 5$

Alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a) Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tel que : $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ par suite : $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tq $x_1 \prec x_2$

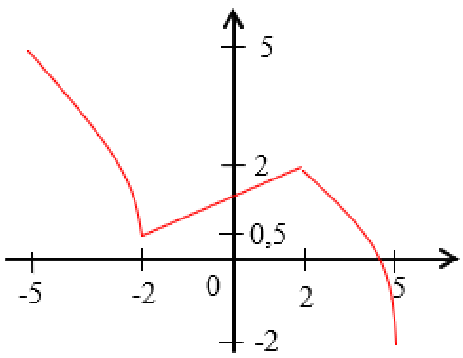
Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ par suite : $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b) tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

3)



x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	$\searrow$	0,5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est constante sur I si et seulement s'il existe un réel k tel que : $f(x) = k$ pour tout $x \in I$

3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a) Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté : $T(x_1;x_2)$ est tq : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

Exemple : Soit f une fonction tq : $f(x)=3x^2+2$

f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(3x_1^2+2)-(3x_2^2+2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3x_1^2-3x_2^2+2-2}{x_1-x_2}=\frac{3(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=3(x_1+x_2)$$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1\in I$ et $x_2\in I$ et $x_1\neq x_2$ on a : $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\succ 0$ ($\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geq 0$)
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1\in I$ et $x_2\in I$ et $x_1\neq x_2$ on a : $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\prec 0$ ($\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq 0$)
- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1\in I$ et $x_2\in I$ et $x_1\neq x_2$ on a : $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0$

Exemples :1) Soit f une fonction tel que : $f(x)=3x^2+2$ $D_f=\mathbb{R}$

Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que $x_1\neq x_2$ on a : $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)$

a) Soient $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$

Donc $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$ Donc $x_1+x_2\geq 0$ par suite : $3(x_1+x_2)\geq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\geq 0$

D'où f est croissante sur $[0;+\infty[$

b) Soient $x_1\in]-\infty;0]$ et $x_2\in]-\infty;0]$

Donc $x_1\leq 0$ et $x_2\leq 0$ Donc $x_1+x_2\leq 0$ par suite : $3(x_1+x_2)\leq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\leq 0$

D'où f est décroissante sur $]-\infty;0]$

b) <u>Résumé</u> : **tableau de variation :** $f(0)=3\times 0^2+2=2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

2) Soient f une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

Soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tel que : $x_1 \neq x_2$ on a : $T(x_1;x_2)=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a) Sur $I=]-\infty;-1[$:

Soient $x_1 \in]-\infty;-1[$ et $x_2 \in]-\infty;-1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \prec -1$ et $x_2 \prec -1$ Donc $x_1+1 \prec 0$ et $x_2+1 \prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $I=]-\infty;-1[$

D'où : g est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b) Sur $J=]-1;+\infty[$:

Soit $x_1 \in]-1;+\infty[$ et $x_2 \in]-1;+\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \succ -1$ et $x_2 \succ -1$ Donc $x_1+1 \succ 0$

et $x_2+1 \succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $J=]-1;+\infty[$

D'où : g est strictement croissante sur $J=]-1;+\infty[$

c) Résumé : **tableau de variation :**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

3-3) les variations et la parité :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'

Conséquences : Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Exemple : Soit f une fonction tel que : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1)Déterminer D_f et étudier la parité de f

2)Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tel que : $x_1 \neq x_2$

3)Étudier les variations de f sur $I=]0;1]$ puis sur $J=[1;+\infty[$

4)En déduire les variations de f sur D_f

5)Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) On a $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}$

$=\frac{x^2{}_1\times x_2+x_2-x^2{}_2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$

$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$

a) Sur $I=]0;1]$ Soient $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\leq 1$ et $0\prec x_2\leq 1$ $x_2+1\prec 0$ Donc $0\prec x_1x_2\leq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2-1\prec 0$ et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

D'où : f est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b) Sur $J=[1;+\infty[$ Soient $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$ Donc $x_1x_2\geq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2\succ 1$ c'est-à-dire : $x_1x_2-1\succ 0$

Et on a : $0\prec x_1x_2$

Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

D'où f est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$.

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I

Donc f est strictement décroissante sur I'

f est strictement croissante sur J

Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ ‖ $\searrow$	2	$\nearrow$

$f(x)=1+\frac{1}{1}=2$

$f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

5) Les variations des deux fonctions : αf et f+α

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $\alpha\in\mathbb{R}^*$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ alors les fonctions f et αf ont les mêmes variations sur I
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$ alors les fonctions f et αf ont des variations opposées sur I
- f et α+f ont les mêmes variations sur I

Exemples :

1)soit la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{6}{x}$

On sait que la fonction $f: x \to \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et puisque $6 \succ 0$ donc la fonction $g=6f$ est aussi décroissante sur $[0;+\infty[$

2)Soit f et g les fonctions numériques : $f(x)=x^2$ et $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2$ $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$h(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+5$

On a $a=-\dfrac{1}{2}\prec 0$ Donc alors les fonctions f et g ont des variations opposées sur $\mathbb{R}$

g et h ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

6) Comparaison deux fonctions (fonctions positives et négatives)

Fonctions majorées ; minorées et bornée :

6-1) Comparaison de fonctions

Définition 1 : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement si : Elles ont même ensemble de définition : $D_f=D_g$ et Pour tout $x\in D_f$: f (x) = g(x)

On écrit : $f=g$

Exemple : Les fonction f et g définies respectivement par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

Réponse : Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$ donc ce qui donne $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$ ce qui donne : $D_g=[1;+\infty[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales.

On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$;on a f (x) = g(x)

6-2) Définitions : Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies sur I.

On dit que :

1)f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in I$. On note : $f\leq g$ Sur I.

2)f est positive sur I lorsque : $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in I$. On note : $f\geq 0$ sur I.

3)f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x)\leq M$ pour tout $x\in I$

4)f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m\leq f(x)$ pour tout $x\in I$

5)f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels Met m tels que : $m\leq f(x)\leq M$ $\forall x\in I$.

(f est majorée et minorée)

Interprétation graphique :1) $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \in I$ si et seulement si : La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessus de La courbe (C_f) de f sur l'intervalle I .

2) $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si : La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle I .

6-3) Exemples :

Exemple1 : Soient f et g les fonctions numériques tel que : $f(x) = x+1$ et $g(x) = x^2 + x + 2$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$g(x) - f(x) = x^2 + x + 2 - (x+1) = x^2 + 1 \succ 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $f(x) \prec g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f \prec g$

Exemple2 : Soit f et g les fonctions numériques tel que : $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g

Exemple3 : Soient les deux fonctions : $f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x) = \frac{1+3x^2}{|x|}$

- On a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

Or on sait que $x^2 \ge 0$ donc $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Alors $f(x) \in \mathbb{R}$ si et seulement si : $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- On a $g(x) \in \mathbb{R}$ si et seulement si : $|x| \neq 0$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R}^*$

Alors : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

On sait que $\sqrt{x^2} = |x|$ et $3x^2 + 1 = 1 + 3x^2$ donc f(x)=g(x)

Donc finalement : on a trouvé que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ et f(x)=g(x)

Donc : f=g.

Exemple4 : Soient les deux fonctions : $h(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ et $t(x) = x - 1$

- On a $h(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_h = \mathbb{R}^*$
- On a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t = \mathbb{R}$

Exemple5 : Soit f la fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$

Etudier le signe de le fonction f

Solution : $4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{1}{2}$

Donc : $D_I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$f(x) \geq 0$ si et seulement si : $x \in \left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2};2\right]$ donc $f \geq 0$ $\forall x \in \left]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{2};2\right]$

$f(x) \leq 0$ si et seulement si : $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right[\cup [2;+\infty[$

Exemple6 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + x$

Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

Solution : On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

On a : $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ donc $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ c'est-à-dire : $f(x) \leq \frac{1}{4}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = \frac{1}{4}$

Exemple7 : Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4\sin x - 3$ est Bornée.

Solution : On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

donc $-4-3 \leq 4\sin x - 3 \leq 4-3$

donc $-7 \leq g(x) \leq 1$ par suite : g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple8 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$. Conclure

Solution :1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ Pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc $x^2 + 1 \geq 1$ alors : $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$

Donc : $f(x) \leq 1$ par suite f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 1$

2) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc $x^2 + 1 \geq 1$ alors : $x^2 + 1 \succ 0$

Donc : $0 \prec f(x)$

Par suite :f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=0$

Conclusion : $0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple9 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1)Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par 1.

3) Démontrer que f est majorée par $\dfrac{7}{3}$ .Conclure

Solution :1) $D_f=\{x \in \mathbb{R} / x^2+3x+3 \ne 0\}$

$\Delta=-3 \prec 0$ Pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-1(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}$$

$f(x)-1=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$ or $x^2+3x+3 \succ 0$ car $\Delta=-3 \prec 0$**(signe de a=1)**

Et on a : $(x+2)^2 \ge 0$ donc $f(x) \ge 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=1$

2) soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x)-\frac{7}{3}=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-\frac{7}{3}=\frac{-x^2}{3(x^2+3x+3)} \le 0$$

Par suite f est majorée par $\dfrac{7}{3}$.

Conclusion : $1 \prec f(x) \le \dfrac{7}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple10 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m \in \mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs de m pour que $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tel que : $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ déterminer les valeurs de m pour que $\forall x \in \{-2;1\}$ on a :

$f(x)=g(x)$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2+x+m \ne 0$

$x^2+x+m \ne 0 \quad \Leftrightarrow \Delta=b^2-4ac=1-4m \prec 0 \Leftrightarrow m \succ \dfrac{1}{4}$

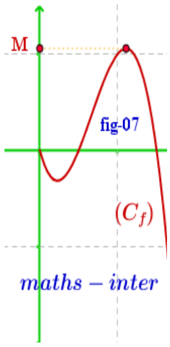
2) $f(x)=g(x) \ \forall x \in \{-2;1\} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x^2+x+m}=\dfrac{1}{x+2}$

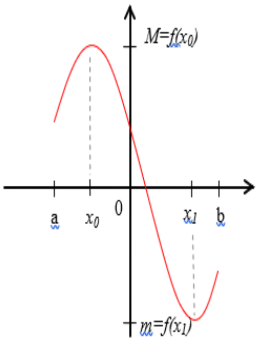
$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=x^2+x+m \Leftrightarrow x^2+x-2=x^2+x+m$

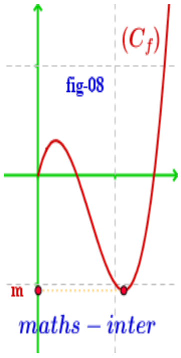
$f(x)=g(x) \ \forall x \in \{-2;1\} \Leftrightarrow -2=m$

7) Les extremums d'une fonction numérique

7-1)) Définitions :







Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) si et seulement si :

pour tout : $x \in I$; $f(x) \leq f(a)$

- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) si et seulement si :

pour tout *:* $x \in I$; $f(x) \geq f(a)$

7-2) Exemples d'applications :

1° Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 5x^2 + 3$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\; x^2 \geq 0$

Donc $5x^2 \geq 0$ car $5 \succ 0$

Par suite $5x^2 + 3 \geq 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\; f(x) \geq f(0)$

D'où :$f(0) = 3$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

2° Soit g une fonction numérique tq : $g(x) = -4x^2 + 1$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\; x^2 \geq 0$ Donc $-4x^2 \leq 0$ car $-4 \prec 0$

Par suite $-4x^2 + 1 \leq 1$ et on a $g(0) = 1$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\; g(x) \leq g(0)$

D'où : $g(0) = 1$ est un maximum absolu de g sur $\mathbb{R}$

7-3) Exemples :

Exemple1 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

1)a) Montrer que $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Montrer que : $f(x) \leq 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Réponses : 1) a) On a $D_f = \mathbb{R}$

$6 - (2x-1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1) = 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$

Donc : $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$

b) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(2x - 1)^2 \geq 0$

Par suite $-(2x - 1)^2 \leq 0$ donc $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\; f(x) \leq 6$

2) On a $f\left(\frac{1}{2}\right)=6-\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2=6-(1-1)^2=6$

On a : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $6-(2x-1)^2\leq 6$ alors $f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exemple2 : Du tableau de variation on a :

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	↘	0,5	↗	2	↘	-2

Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0=2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0=-2$

Exemple3 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=-x^2+4x-3$

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x)\leq 1$ et que l'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$f(x)-1=-x^2+4x-3-1=-x^2+4x-4$

$f(x)-1=-\left(x^2-4x+4\right)=-(x-2)^2\leq 0$

Donc : $f(x)\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$ et on a : $f(x)=1\Leftrightarrow f(x)-1=0\Leftrightarrow-(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$

Donc 'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2)=1$ donc : $f(x)\leq f(2)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(2)=1$ est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1}$

1)Déterminer D_f

2) a) Démontrer que f est majorée par 3.

b) est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) Est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\right\}$

$x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ Pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) a) soit $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)-3=\frac{2x^2+3}{x^2+1}-3=\frac{2x^2+3-3\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{2x^2+3-3x^2-3}{x^2+1}$

Donc $f(x)-3=\frac{-x^2}{x^2+1}\leq 0$ par suite $f(x)\leq 3\quad\forall x\in\mathbb{R}$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

b) On remarque que : $f(0)=3$ donc : $f(x)\leq f(0)\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

2) a) soit $x\in\mathbb{R}$; $f\left(x\right)-2=\frac{2x^2+3}{x^2+1}-2=\frac{2x^2+3-2\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}$

Donc $f\left(x\right)-2=\frac{1}{x^2+1}\succ 0$ par suite : $0\prec f\left(x\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=2$

b) On remarque que : $f\left(x\right)\succ 2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

Conclusion : $2\prec f\left(x\right)\leq 3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple5: Soit f une fonction numérique définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par : $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

1) Etudier le signe de f

2) a) Démontrer que f est majorée par $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) Est ce que $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution :1) soit $x\in\left]1;+\infty\right[$; $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$

$$f\left(x\right)=\frac{x+1-2}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x-1}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$$

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\succ 0$$

Donc $f\left(x\right)\succ 0$ si $x\in\left]1;+\infty\right[$

2) a) $x\in\left]1;+\infty\right[$ montrons que $f\left(x\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$

Soit $x\in\left]1;+\infty\right[$ donc $x\succ 1$ cad $x+1\succ 2$

Donc : $\sqrt{x+1}\succ\sqrt{2}$ alors : $\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\succ 2\sqrt{2}$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\prec\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Donc : $f\left(x\right)\prec\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x\in\left]1;+\infty\right[$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

Conclusion : $2\prec f\left(x\right)\leq 3 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) On remarque que : $f\left(0\right)=3$

Donc : $f\left(x\right)\leq f\left(0\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $\left]1;+\infty\right[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) Puisque $f(x)\neq\frac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in\left]1;+\infty\right[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exemple6 : Soit f une fonction numérique définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimale de f
3) Démontrer que f est majorée par 1 et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?
Solution :1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}+2\neq 0 et x\geq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}\neq -2 et x\geq 0\right\}$

Donc / $D_f=\left[0;+\infty\right[$

2) Montrons que : $f(x)\geq -1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$$f(x)-(-1)=f(x)+1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+1=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\geq 0$$

Donc $f(x)\geq -1\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ et on a :

$$f(x)=-1\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=0\Leftrightarrow x=0$$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0)=-1$ donc : $f(x)\geq f(0)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ont dit que $f(0)=-1$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit $x\in\mathbb{R}^+$ $\quad f(x)-1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-1=\frac{-4}{\sqrt{x}+2}\prec 0$

Donc $f(x)\prec 1\quad\forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc : f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M=1$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $\left]1;+\infty\right[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) Puisque $f(x)\neq\frac{\sqrt{2}}{4}\ \forall x\in\left]1;+\infty\right[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exemple7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2-2x+3$

1)a) Démontrer que f est minorée.
b) Est ce que f admet une valeur minimale ?
2) Démontrer que f est non majorée.
Solution : $D_f=\mathbb{R}$

1)a) $f(x)=x^2-2x+3=\left(x^2-2x+1\right)+2=(x-1)^2+2$

Donc $f(x)-2=(x-1)^2\geq 0$

Donc : $f(x)\geq 2\ \forall x\in\mathbb{R}$ donc que f est minorée par 2 et on a : $f(1)=2$ donc : $f(x)\geq f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \le M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 + 2 \le M \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \le M - 2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-1)^2} \le \sqrt{M-2}$ (on peut toujours supposer $M \ge 2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \le \sqrt{M-2}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2} \le x-1 \le \sqrt{M-2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}+1 \le x \le \sqrt{M-2}+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ absurde

Donc f est non majorée

8) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

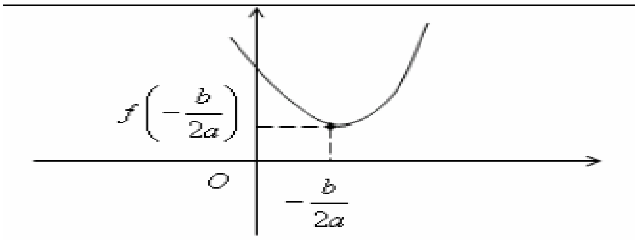
8-1) Résumé : $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \ne 0$

1° Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

2° Les variations de f

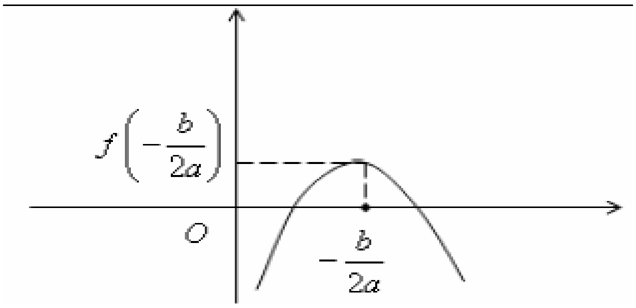
Si $a \succ 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗



Si $a \prec 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘



2-2) Exemples :1) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = 2$ et $b = -4$ et $c = -2$ $(f(x) = ax^2 + bx + c)$

Donc $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{4}{2\times 2}=1$ et $\left(f\,(1)=2-4-2=-4\right)$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f\,(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=2(x-1)^2-4$$

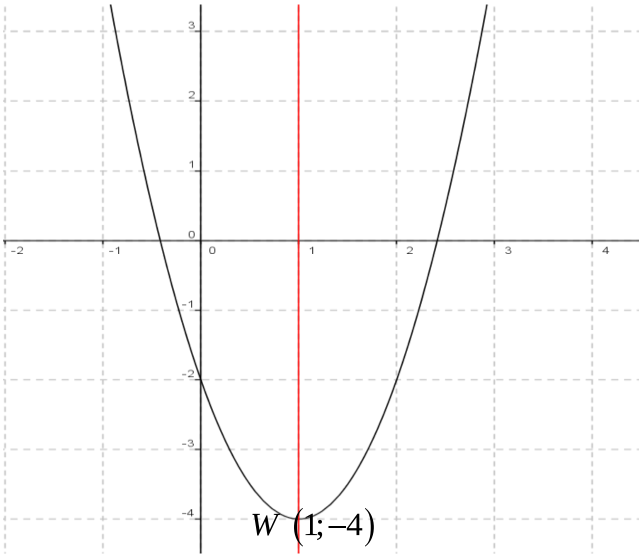
Soit $W\;(1;-4)$ Donc dans le repère $\left(0;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $W\;(1;-4)$

et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Tableau de variations de f

On a $a=2\succ 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$



2° Soit g une fonction numérique tel que : $g\,(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$

On a : g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On a $a=-\dfrac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=1\left(g\,(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\dfrac{b}{2a}=2$ et $\beta=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{4+2}{-2}=3$

Donc pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $g\,(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+3$

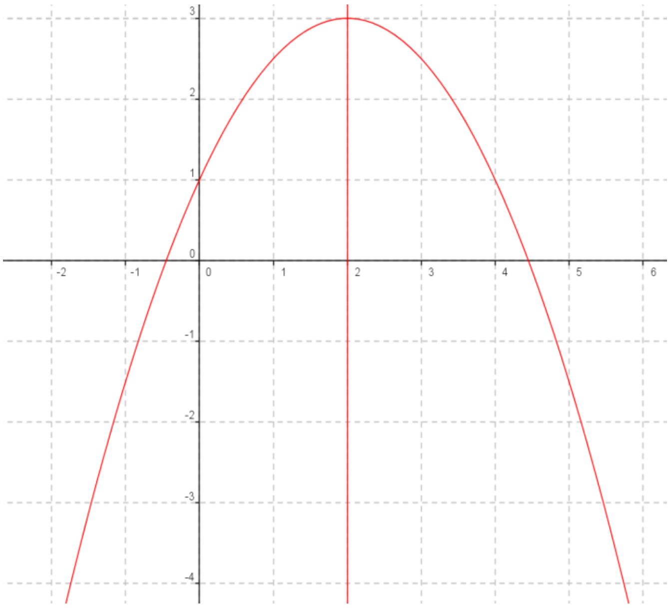
$$\left(g\,(2)=-\frac{1}{2}(2-2)+3=3\right)$$

Donc : dans le repère $\left(0;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_g\right)$ c'est une parabole de sommet $W\;(2;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

Tableau de variations de f

On a $a=-\dfrac{1}{2}\prec 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$



9) Etude et représentation graphique des fonctions homographique : $x \xrightarrow{f} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\quad a \neq 0$ et $c \neq 0$

9-1) Résumé et propriété : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

On a : $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow cx+d \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{d}{c}$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$: (C_f) est l'hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \succ 0$

<u>Tableau de variations de f :</u>

x	$-\infty$ $\quad -\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ ‖	$\nearrow$

2iér cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \prec 0$

<u>Tableau de variations de f :</u>

x	$-\infty$ $\quad -\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ ‖	$\searrow$

Exemple1: Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

on a $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

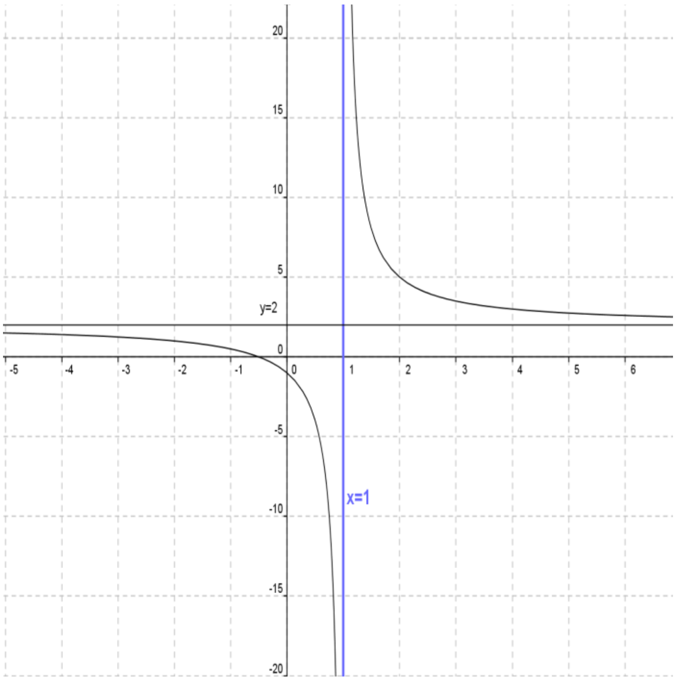
Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$; $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \prec 0$

• <u>Donc le tableau de variations de</u> $x \longrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

- Représentation graphique

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$



-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

Exemples2: Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\frac{-x}{x-2}$

On a : $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\succ 0$$

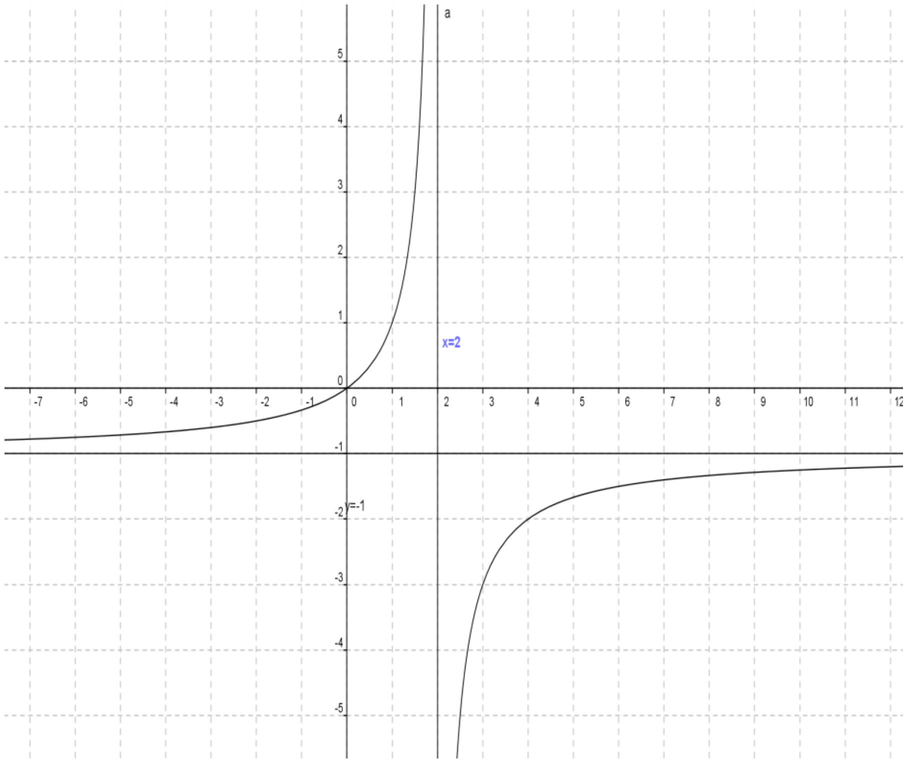
- Donc le tableau de variations

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

- Représentation graphique

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=2$ et $y=-1$

-1	0	1	2	3	4	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3



10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme : $x \xrightarrow{f} ax^3$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer D_f

2) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3) Tracer la dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1) $D_f = x \in \mathbb{R}$

2)soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1^3 < x_2^3$ Donc : $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

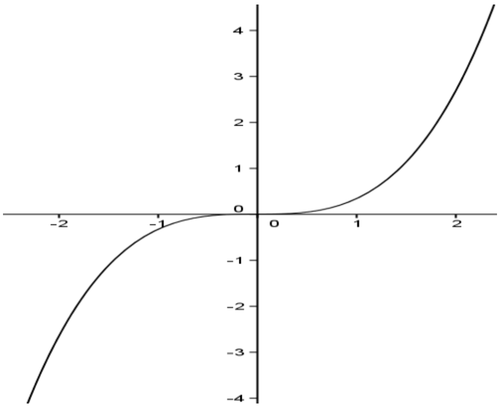
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



11) Etude et représentation graphique de la fonction : $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

Exemple : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) Déterminer D_f

2) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3) Tracer la dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ de f .

Solutions : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}=[-2,+\infty[$

2)soient $x_1\in[-2;+\infty[$ et $x_2\in[-2;+\infty[$ tel que : $x_1<x_2$

Donc : $x_1+2<x_2+2$

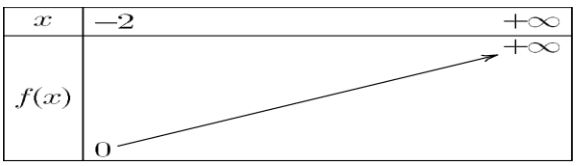
Donc : $\sqrt{x_1+2}<\sqrt{x_2+2}$

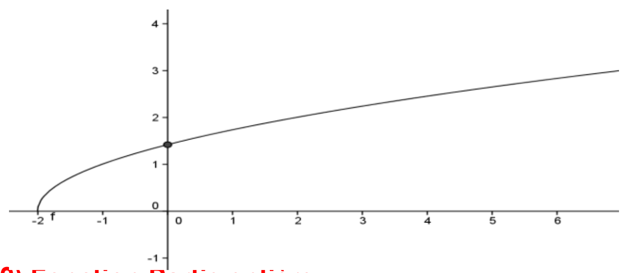
Donc : $f(x_1)<f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3





12) Fonction Partie entière

12-1) Définition : Soit $x\in\mathbb{R}$

La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Notation : La partie entière de x est maintenant notée : $E(x)$ ou $[x]$

Exemples : $E(4.2)=4$; $E(-3.26)=-4$; $E(\sqrt{3})=1$; $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

12-2) Propriété : 1) $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)\leq x\prec E(x)+1$

2) $\forall x \in \mathbb{Z}$; $E(x) = x$

3) ; $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Un nombre x est entier si et seulement si ; il est égal à sa partie entière

4) $\forall p \in \mathbb{Z}$; $\forall x \in \mathbb{R}$ $E(x+p) = p + E(x)$

Exemples :1) Déterminer : $E(\pi)$

1) Déterminer : $E\left(3+\frac{1}{n}\right)$ si $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

Solutions : 1) On a : $3 \le \pi \prec 3+1$ donc $E(\pi) = 3$

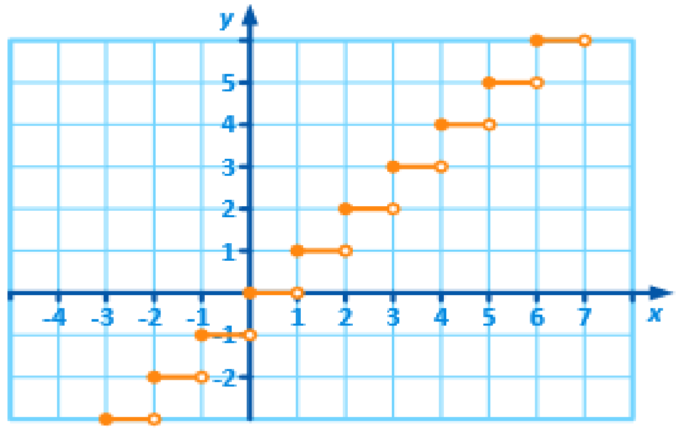
2) on a : $n \ge 2$ alors : $0 \le \frac{1}{n} \prec 1$ donc : $E\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$E\left(3+\frac{1}{n}\right) = 3 + E\left(\frac{1}{n}\right) = 3+0 = 3$

12-3) représentation graphique de la fonction : $x \mapsto E(x)$

2) Soit $k \in \mathbb{Z}$; si $k \le x \prec k+1$ alors $E(x) = k$

Donc : Voici la courbe représentative de la fonction partie entière :



13)La composée de deux fonctions

13-1) Définition : Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que :

$\forall x \in I \quad f(x) \in J$

La composée des deux fonctions f et g est la fonction notée : $g \circ f$ définie sur I par :

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in I$

On peut alors faire le schéma suivant : $x \to f(x) = y \to g(f(x)) = z$

13-2) Exemples

Exemple1 : Soit les fonctions f et g tel que : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 2x+1$

Déterminer : $g \circ f$ et $f \circ g$

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ et $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1$

$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 7$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 3$

$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 2 + 3 = 4x^2 + 2$

Remarque :1) La composée de deux fonctions n'est pas commutative c.-à-d. $g \circ f \neq f \circ g$

2)Soit D_f et D_g les ensembles de définition des fonctions f et g.

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \quad et \quad f(x)\in D_g\right\}$

Exemple2 : Soient les fonctions f et g définies par : $f(x)=3x+4$ et $g(x)=\frac{1}{x+1}$

1) Déterminer $D_{g\circ f}$

2) Déterminer : $(g\circ f)(x)$

Solution : 1) $D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f et f(x)\in D_g\right\}$

On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ donc $D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} et f(x)\neq -1\right\}$

$f(x)=-1\Leftrightarrow 3x+4=-1\Leftrightarrow 3x=-5\Leftrightarrow -\frac{5}{3}=x$

Donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

2)On a : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+4)=\frac{1}{3x+4+1}$

$(g\circ f)(x)=\frac{1}{3x+5}$

Exemple3 : Soient les fonctions f et g définies par : $g(x)=\frac{x}{x+2}$ et $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$

On pose : $h(x)=(g\circ f)(x)$

1) Déterminer D_h 2) déterminer : $h(x)$

3) Soit la fonctions k définie par : $k(x)=\frac{x+3}{3x+5}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1) On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

$D_{g\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \quad et \quad f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq -1 \; et \quad f(x)\neq -2\right\}$

$f(x)=-2\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1}=-2\Leftrightarrow -2(x+1)=x+3\Leftrightarrow -3x=5\Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$

Donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3};-1\right\}$

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=\frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3}{x+1}+2}=\frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3+2x+2}{x+1}}=\frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{3x+5}{x+1}}=\frac{x+3}{3x+5}$$

Donc : $h(x)=\frac{x+3}{3x+5}$

3)Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$D_h=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3};-1\right\}$ et $D_k=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

Exemple4 : Exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

1) $h_1(x)=\frac{1}{3x-1}$ 2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$ 3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$

Solution : 1) $h_1(x)=\frac{1}{3x-1}$ On a : $h_1(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=3x-1$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

2) $h_2(x)=\sqrt{x+3}$ on a : $h_2(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=x+3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

3) $h_3(x)=3\sqrt{x}+4$ on a : $h_3(x)=(g\circ f)(x)$ avec $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=3x+4$

13-3) Variations d'une fonction composée

Théorème : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur f (I).

➪ Si f et g ont même variation respectivement sur I et f (I) alors la fonction $g\circ f$ Est croissante sur I.

➪ Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et f (I) alors la fonction $g\circ f$ est décroissante sur I.

Remarque : Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaire

Exemple1: Soit f la fonction f définie sur un intervalle $[0;+\infty[$ tel que : $f(x)=-5x^2+7$

On va décomposer une fonction en fonctions élémentaire : $v(x)=-5x+7$ et $u(x)=x^2$

La fonctions $f=v\circ u$

La fonction u est croissante sur $[0;+\infty[$ et $u(x)=x^2\in[0;+\infty[$ et v est décroissante sur $[0;+\infty[$

Donc d'après le théorème des fonctions composées, $f=v\circ u$ est décroissante sur $[0;+\infty[$

Exemple2 : Soit la fonction h définie sur $]-\infty;1]$ par $h(x)=\sqrt{1-x}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.

2) Déterminer les variations de h.

Solution :1) La fonction h se décompose de cette façon $h=g\circ f$

On a alors : $f(x)=1-x$ et $g(x)=\sqrt{x}$

2) On sait que :

➪ f est décroissante sur $]-\infty;1]$

➪ g est croissante sur $f(]-\infty;1])=[0;+\infty[$

Donc La fonction h décroissante sur $]-\infty;1]$

On a alors le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	-1
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0

14) Fonctions périodiques :

Définition : On considère une fonction réelle f dont on note D l'ensemble de définition.

On dit que f est périodique de période T si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $\forall x\in D$ on a $x+T\in D$

b) $\forall x\in D$ on a $f(x+T)=f(x)$

et la période de f c'est le plus petit réelle strictement positif qui vérifie les conditions

Exemple de fonctions périodiques :

1)Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est périodique ; tout réel non nul en est une période.

2) les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T=2\pi$ et la fonction tangente est périodique de période $T=\pi$

3) La période des fonctions : $f:x\to\cos(ax)$ et $f:x\to\sin(ax)$ $a\neq 0$ est $T=\frac{2\pi}{a}$

Exemple1 : Montrer que la fonction $f:x\to x-E(x)$ est périodique de période 1.

Solution: $D_f=\mathbb{R}$

a) $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $x+1\in\mathbb{R}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a:

$f(x+1) = x+1-E(x+1) = x+1-E(x)-1 = f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

Exemple2 : Quelle est la période des fonctions suivantes :1) $f: x \to \sin(4x-1)$ 2) $g: x \to \cos(5x)$

3) Trouver une fonction de période $T = \frac{3}{4}$

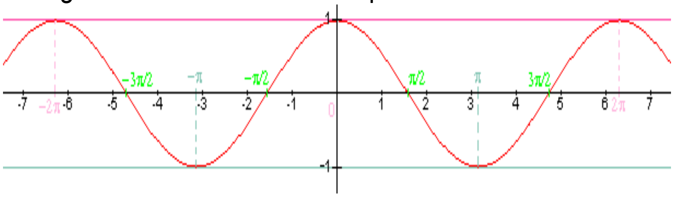
Solution :1) $T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 2) $T = \frac{2\pi}{5}$

3)Une fonction est. $h: x \to \cos(\frac{8\pi}{3}x)$

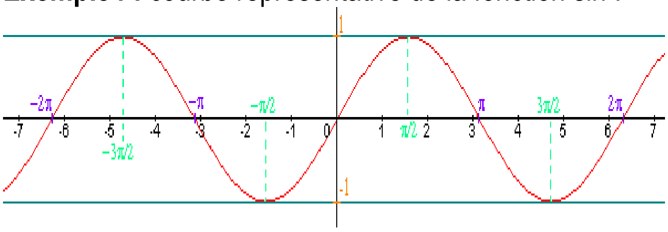
Remarque : La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période

Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction T-périodique, il suffit donc de construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire.

Exemple3 : Observons une courbe représentative de la fonction cos : on a $T = 2\pi$ et sur $[-\pi;\pi]$ dont la longueur est égale à 2π La courbe se répète tous les $T = 2\pi$



Exemple4 : courbe représentative de la fonction sin :



Exemple5: Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T = 2$

Tel que : $f(x) = 2x - x^2 \quad \forall x \in [0;2[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(4.1)$; $f(-3.5)$; $f(265.11)$

3) Donner l'expression de : $f(x) = 2x - x^2$ sur les intervalles : $I_k = [2k;2(k+1)[\ k \in \mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0 = [0;2[$ on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=2$ et $c=0$ $(f(x) = ax^2 + bx + c)$

Donc $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times(-1)} = 1$ et $(f(1) = 2-1 = 1)$

Donc la courbe (C_f) c'est une portion de parabole de sommet $A(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0 = [0;2[$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2) Calculons : $f(4.1)=f(2+2.1)=f(2.1)=f(2+0.1)=f(0.1)$ $f(4.1)=2(0.1)-(0.1)^2=0.19$

$f(-3.5)=f(-4+0.5)=f(0.5)$ et $f(-3.5)=2(0.5)-(0.5)^2=0.75$

$f(265.11)=f(2\times 132+1.11)=f(1.11)$ et $f(1.11)=2(1.11)-(1.11)^2\approx 0.98$

3) L'expression de : $f(x)=2x-x^2$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[$ $k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[2k;2(k+1)[\Leftrightarrow 2k\leq x\prec 2(k+1)$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\leq x-2k\prec 2\Leftrightarrow f(x-2k)=f(x)$

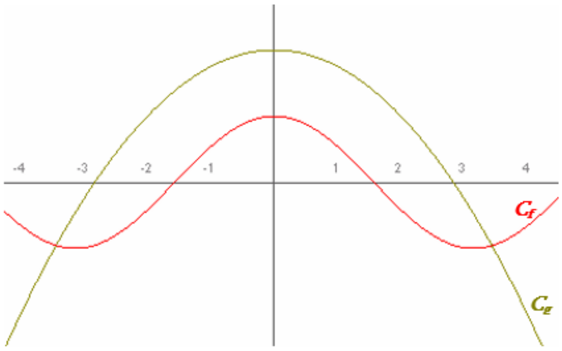
$x\in I_k\Leftrightarrow f(x)=2(x-2k)-(x-2k)^2$ avec $k\leq\frac{x}{2}\prec k+1$ cad $k=E\left(\frac{x}{2}\right)$

15) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au- dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s). Il te permettra d'interpréter ensuite, dans des problèmes plus concrets, des situations liées `à la physique, la chimie, l'´économie, ?

1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de *f* et (C_g) la courbe représentative de *g*.



On peut établir les relations suivantes :

$M(x;y)\in(C_f)\Leftrightarrow y=f(x)$ et $M(x;y)\in(C_g)\Leftrightarrow y=g(x)$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g), on a $M\in(C_f)$ et $M\in(C_g)$

Donc : $f(x)=g(x)$

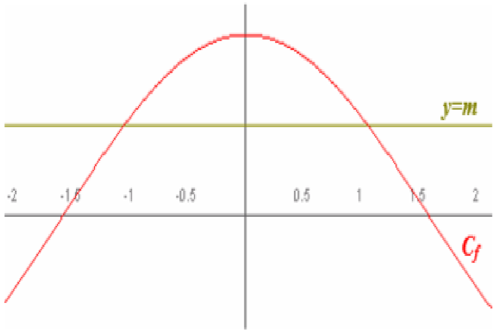
A retenir :

- Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de (C_f) et de (C_g) .
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au- dessous de (C_g)

Un cas particulier : équation $f(x)=m$ et inéquation $f(x)\geq m$

• Les solutions de l'équation $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y=m$

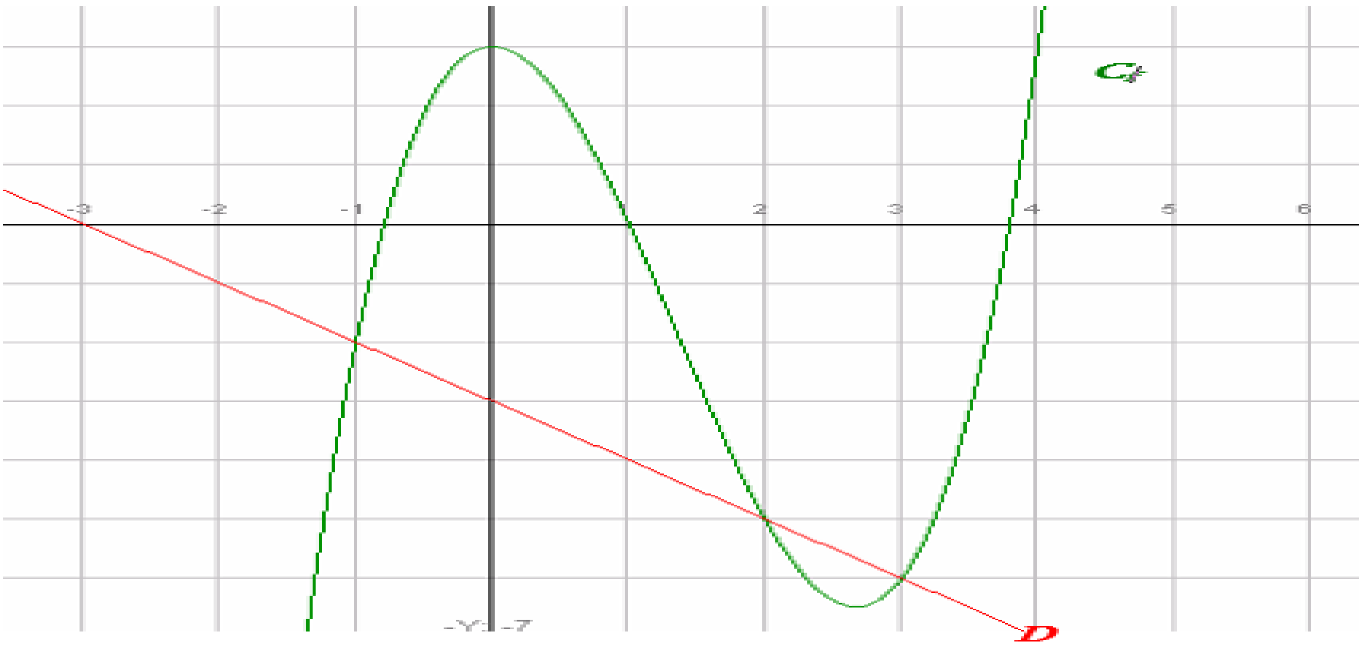
• Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y=m$.



2) Quelques exercices d'application :

Exercice1 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x)=x^3-4x^2+3$ et la droite (D) d'équation $y=-x-3$

1) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=3$ puis l'inéquation : $f(x)\prec 3$.
2) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$ puis l'inéquation : $f(x)\geq 0$
3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=-x-3$ puis l'inéquation : $f(x)\leq -x-3$



Réponses : 1) $f(x)=3$ l'ensemble des solutions est l'ensemble des antécédents de 3 : $S=\{0;4\}$

$f(x)\prec 3 \quad \Leftrightarrow S=]-\infty;4[$

2) $f(x)=0$ l'ensemble des solutions est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{a;1;b\}$

Avec $-1\prec a\prec -0.5$ et $3.5\prec b\prec 4$

$f(x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow S=[a;1]\cup[b;+\infty[$

3) $f(x)=-x-3$ Les solutions est l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D : $y=-x-3$

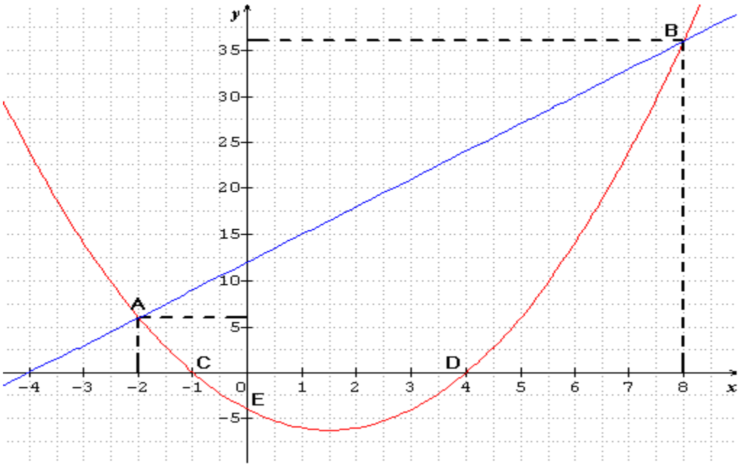
Donc : $S=\{-1;2;3\}$

$f(x) \leq -x-3 \Leftrightarrow S =]-\infty;-1] \cup [2;3]$

Exercice2 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$

1) Tracer Les courbes (C_f) et (C_g)
2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$
3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$
4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



2) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 8$ donc $S = \{-2;8\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 3x + 12 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$ $a = 1$ et $b = -6$ et $c = -16$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\times1\times(-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc : $x_1 = \frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times1} = \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8$ et $x_2 = \frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times1} = \frac{6-10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Donc : $S = \{-2;8\}$

3) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$:

$f(x) \succ g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \succ 3x + 12 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \succ 0$

Les racines sont : $x_1 = 8$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S = \left]-\infty;-2\right[\cup \left]8;+\infty\right[$

5) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses :

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$ $\quad a=1$ et $b=-3$ et $c=-4$

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times1\times(-4) = 9+16 = 25 = (5)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{-2}{2} = -1$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $C(-1;0)$ et $D(4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées :

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle et on a : $f(0)=0^2-3\times0-4=-4$

Donc : le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4;0)$

Exercice3 : Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g.

1) Dresser le Tableau de variations de f et de g.
2) a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses.

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère.
4) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

Réponses : 1) a) $f(x)=-x^2-2x+3$ on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=-2$ et $c=3$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times(-1)} = -1$ et $\left(f(-1)=4\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-1;4)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-1$

Donc le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

1)b) $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ on a $g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+2\neq0 \Leftrightarrow x\neq-2$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \succ 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-2$ et $y=1$

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

2)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3=0 \quad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+11=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\dfrac{2+4}{-2}=\dfrac{6}{-2}=-3$ et $x_2=\dfrac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A(-3;0)$ et $B(1;0)$

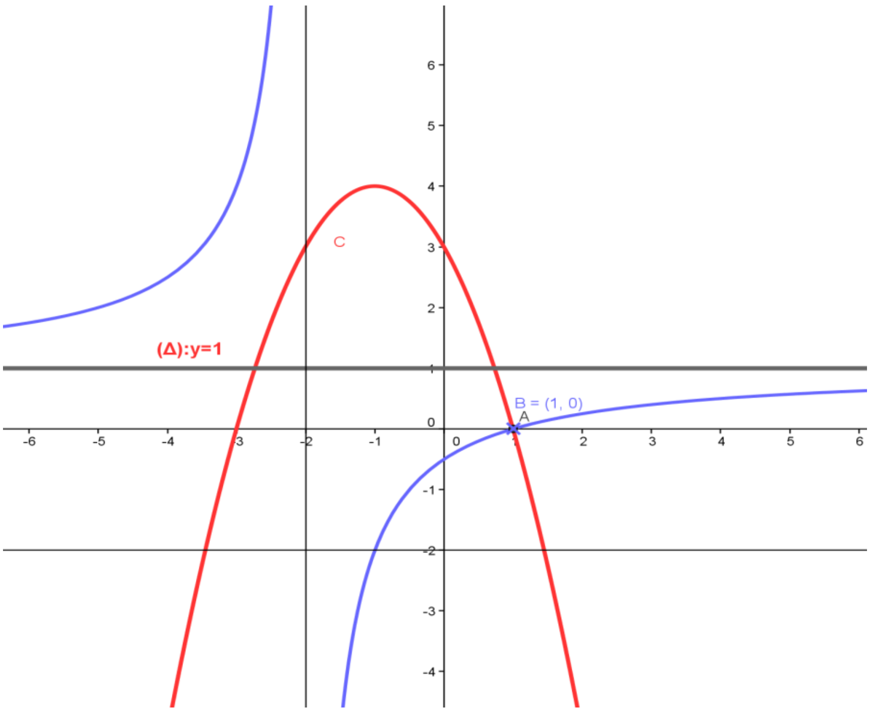
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

<u>3)Représentation graphique</u>

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



4) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

4)b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-2;1\right]$

Donc $S=\left]-2;1\right]$.

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$. Conclure

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ on a $x + \sqrt{x} \geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}$ donc $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \geq 0$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}^+$ par $m = 0$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)}$$

$$f(x) = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)}$$

Si $x \in \mathbb{R}^{*+}$: $\frac{1}{\sqrt{x}} \succ 0$ donc $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \succ 1$

Donc/ $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \succ 1$ c'est-à-dire : $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 \succ 2$

Donc : $\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} \prec \frac{1}{2}$

Donc : $f(x) \prec \frac{1}{2}$ et on a : $f(0) = 0 \prec \frac{1}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $f(x) \prec \frac{1}{2}$

Par suite : f est majorée par $\frac{1}{2}$.

Conclusion : $0 \prec f(x) \prec \frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple5 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

3) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$; $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4 = x^2 + 2x\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}\right)^2 - 4$

$f(x) = \left(x+\sqrt{x}\right)^2 - 4$ C'est-à-dire : $f(x) + 4 = \left(x+\sqrt{x}\right)^2 \geq 0$

Donc : $f(x) + 4 \geq 0$ donc $f(x) \geq -4$ et on a : $f(0) = -4$ donc $f(x) \geq f(0)$

Donc : $f(0) = -4$ est une valeur minimale de f au point $x_0 = 0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(x+\sqrt{x}\right)^2 - 4 \leq M \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(x+\sqrt{x}\right)^2 \leq M + 4$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \sqrt{x} \leq \sqrt{M+4}$ (on peut toujours supposer $M \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2}\sqrt{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M+4}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M+4} + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x} \leq \sqrt{\sqrt{M+4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x \leq \left(\sqrt{\sqrt{M+4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$ Absurde

Donc f est non majorée.

Exercice6 : Soient f et g et h les trois fonctions définies par :

$f(x) = \frac{6x^2 + 8x + 11}{(x-1)^2}$ et $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ et $h(x) = x^2 + 2$

1)a) Etudie r les variations de g et de h

b) Etudier le signe de la fonction g

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

3) Etudier les variations de f dans les intervalles : $]1;+\infty[$; $\left[-\frac{3}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

Réponses :1) a) $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. ; on a $g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$; $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \prec 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 2$

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

1)a) On a h est une fonction polynôme donc $D_h = \mathbb{R}$

Donc le tableau de variations de h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

b) Etudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

2)montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\} : f(x)=(h\circ g)(x)$

$$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$$

$$(h\circ g)(x)=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2+2=\frac{4x^2+12x+9+2x^2-4x+2}{(x-1)^2}=\frac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\} : f(x)=(h\circ g)(x)$

3)Etude des variations de f dans les intervalles :

a) Sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$: On a $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\} : f(x)=(h\circ g)(x)$

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et $\forall x \in \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right] : g(x)\in[0;+\infty[$ et h est croissante sur $[0;+\infty[$

Alors : $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

b) Sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$; Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$ et $\forall x \in \left[-\frac{3}{2};1\right[: g(x)\in\left]-\infty;0\right]$ et h est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{3}{2};1\right[$

c) Sur $]1;+\infty[$; Puisque g est décroissante sur $]1;+\infty[$ et $\forall x \in]1;+\infty[\ g(x)\in]0;+\infty[$ et h est croissante sur $]0;+\infty[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $]1;+\infty[$

Donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-3/2$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

prof : Atmani najib