http://www.xriadiat.com **DM4: 01** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir à domicile n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Exercice1 : (1,5pts) Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x}{x-2}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\forall x \in D_f)\ |x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$?

On a : $|f(x)+1| = \left|\frac{x}{x-2}+1\right| = \left|\frac{2x-2}{x-2}\right| = 2\left|(x-1)\frac{1}{x-2}\right| = 2|x-1|\left|\frac{1}{x-2}\right|$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $2|x-1|\left|\frac{1}{x-2}\right|$

Soit : $x \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ donc : $\frac{1}{2} \prec x \prec \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}-2 \prec x-2 \prec \frac{3}{2}-2 \Rightarrow -\frac{3}{2} \prec x-2 \prec -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \prec |x-2| \prec \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} \prec 2$

Donc : $|f(x)+1| \le 4|x-1|$ si $x \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $|x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)+1| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $4|x-1| \prec \varepsilon$ c'est à dire : $|x-1| \prec \frac{\varepsilon}{4}$ et $|x-1| \prec \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{4}$ e t $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{4};\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\alpha = \inf\left(\frac{\varepsilon}{4};\frac{1}{2}\right))|x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

Exercice2 : (2pts) : Soit : a ; b et c des nombres réels tel que : $a \succ 0$

Calculer suivant les valeurs de a la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{ax^2+bx+c}$

Solution : Soit : a ; b et c des nombres réels tel que : $a \succ 0$

Calculons suivant les valeurs de a la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{ax^2+bx+c}$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{ax^2+bx+c} = \lim_{x \to +\infty} x - |x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)$$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2} = a$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} = \sqrt{a}$

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} = 1-\sqrt{a}$ et comme : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Alors : on déduit, d'après les propriétés sur la limite d'un produit, que:

Si : $1-\sqrt{a} \succ 0$: c'est-à-dire : $0 \prec a \prec 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{ax^2+bx+c} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right) = +\infty$

Si : $1-\sqrt{a} \prec 0$: c'est-à-dire : $a \succ 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{ax^2+bx+c} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right) = -\infty$

Si : $a=1$: alors les propriétés sur la limité d'un produit ne permet pas conclure (forme indéterminée de type "$0 \times \infty$"), pour lever l'indétermination,
On utilise la technique de multiplication par l'expression conjuguée :

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2+bx+c} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x+\sqrt{x^2+bx+c}\right)\left(x-\sqrt{x^2+bx+c}\right)}{x+\sqrt{x^2+bx+c}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-x^2-bx-c}{x+\sqrt{x^2+bx+c}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2+bx+c} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{bx+c}{x+\sqrt{x^2+bx+c}} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x\left(b+\frac{c}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{b+\frac{c}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}$$

Puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2} = 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$

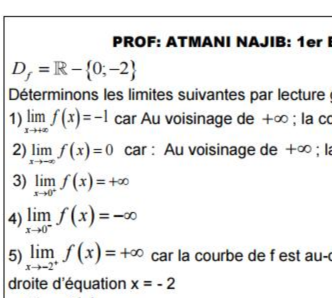
Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} = 2$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} b+\frac{c}{x} = b$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2+bx+c} = -\frac{b}{2}$

Exercice3 : (2, 5pts) $(0{,}25\text{pt} \times 10)$: La figure suivante représente la courbe d'une fonction f
Déterminer, par lecture graphique le domaine de définition de f et les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 4) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 5) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ 6) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)+1}$ 8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)}$ 9) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 10) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$



Solution : La lecture graphique montre que : 0 et -2 n'ont pas d'image par f

$D_f = \mathbb{R} - \{0;-2\}$

Déterminons les limites suivantes par lecture graphique :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ car Au voisinage de $+\infty$; la courbe de f s'approche de la droite d'équation : $y=-1$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ car : Au voisinage de $+\infty$; la courbe de f s'approche de l'axe des abscisses;

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

5) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ car la courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses, et s'approche de la droite d'équation x = - 2

6) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)+1}$: On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)+1 = 0^+$
Car la courbe de f se trouve au-dessus de la droite d'équation :y=-1
Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)+1} = +\infty$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)}$: On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$ car la courbe de f est au-dessous de l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

9) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$ 10) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0 = f(-1)$

Exercice4 : (7pts) : $(0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt})$

Considérons la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \dfrac{E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})}{nx}$ Avec : $n \in \mathbb{N}^*$

1) Déterminer : D_f
2) Simplifier : $f_1(x)$
3) a) Montrer que : $E(x)+E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ (poser : $E(x)=n$ et discuter)
b) En déduire une simplification de : $f_2(x)$
4) Montrer que : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$
5) a) Montrer que : $1-\frac{1}{nx} \prec f_n(x) \le 1$; $\forall x \in]0;+\infty[$
b) En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$
6) Etudier la limite de f_n en 0
7) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 1^+} f_n(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f_n(x) = \frac{n-1}{n}$

Solution : 1) $D_{f_n} = \{x \in \mathbb{R} / nx \ne 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2) Simplification de : $f_1(x)$

On a : $f_1(x) = \frac{E(x)}{x}$

3) a) Montrons que : $E(x)+E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$: On a : $E(x) \le x \prec E(x)+1$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}\ 0 \le x-E(x) \prec 1$

On pose : $x-E(x) = r$ donc : $0 \le r \prec 1$

$x-E(x) = r \Leftrightarrow x = E(x)+r$

$E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right) = E(2x) \Leftrightarrow E(E(x)+r)+E\left(E(x)+r+\frac{1}{2}\right) = E(2(E(x)+r))$

$\Leftrightarrow E(x)+E(r)+E(x)+E\left(r+\frac{1}{2}\right) = E(2E(x)+2r) \Leftrightarrow 2E(x)+0+E\left(r+\frac{1}{2}\right) = 2E(x)+E(2r)$

Donc : $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right) = E(2x) \Leftrightarrow E\left(r+\frac{1}{2}\right) = E(2r)$

Si je montre que : $E\left(r+\frac{1}{2}\right) = E(2r)$ Avec : $0 \le r \prec 1$ alors c'est fini

Si : $0 \le r \prec \frac{1}{2}$ alors : $0 \le 2r \prec 1$ et $\frac{1}{2} \le r+\frac{1}{2} \prec 1$ donc : $E\left(r+\frac{1}{2}\right) = 0$ et $E(2r) = 0$

D'où : $E\left(r+\frac{1}{2}\right) = E(2r)$

Si : $\frac{1}{2} \le r \prec 1$ alors : $1 \le 2r \prec 2$ et $\frac{3}{2} \le r+\frac{1}{2} \prec 2$ donc : $E\left(r+\frac{1}{2}\right) = 1$ et $E(2r) = 1$

D'où : $E\left(r+\frac{1}{2}\right) = E(2r)$

Par suite : $E\left(r+\frac{1}{2}\right) = E(2r)$ Avec : $0 \le r \prec 1$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right) = E(2x)$

b) Déduction d'une simplification de : $f_2(x)$

$f_2(x) = \dfrac{E(x)+E(x+\frac{1}{2})}{2x} = \dfrac{E(2x)}{2x}$

4) Montrons que : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$

C'est-à-dire Montrons que : $\dfrac{E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})}{nx} = \dfrac{E(nx)}{nx}$

C'est-à-dire Montrons que : $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n}) = E(nx)$???

On pose : $E(x) = m \in \mathbb{Z}$ et donc : $m \le x \prec m+1$

Donc : $m+\frac{k}{n} \le x+\frac{k}{n} \prec m+1+\frac{k}{n}$; $\forall k \in \{0;1;....;n-1\}$

Donc : $m \le m+\frac{k}{n} \le x+\frac{k}{n} \prec m+1+\frac{k}{n} \prec m+2$ (on ne peut pas déterminer : $E(x+\frac{k}{n})$

On a : $x+\frac{k_0}{n} \prec m+1 \le x+\frac{k_0+1}{n}$ par suite : $\forall k \in \{0;1;....;k_0\}$ on a : $m \le m+\frac{k}{n} \le x+\frac{k_0}{n} \prec m+1$

Donc : $E(x+\frac{k}{n}) = m\ \forall k \in \{0;1;....;k_0\}$ ①

Et $\forall k \in \{k_0+1;....;n-1\}$; $m+1 \le x+\frac{k_0+1}{n} \prec x+\frac{k}{n} \prec m+2$

Donc : $E(x+\frac{k}{n}) = m+1$; $\forall k \in \{k_0+1;....;n-1\}$ ②

De : ① et ② en déduit que : $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n}) = m(k_0+1)+(m+1)(n-k_0-1)$

(Car : de p à q il Ya : q-p+1 éléments)

Donc : $E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n}) = mn+n-k_0-1$

Et puisque : $x+\frac{k_0}{n} \prec m+1 \le x+\frac{k_0+1}{n}$ alors : $m+1-\frac{k_0+1}{n} \le x \prec m+1-\frac{k_0}{n}$

Donc : $mn+n-k_0-1 \le mn \prec mn+n-k_0$

Donc : $E(nx) = E(x)+E(x+\frac{1}{n})+...+E(x+\frac{n-1}{n})$

5) a) Montrons que : $1-\frac{1}{nx} \prec f_n(x) \le 1$; $\forall x \in]0;+\infty[$

On sait que : $x-1 \prec E(x) \le x \Rightarrow nx-1 \prec E(nx) \le nx \Rightarrow \frac{nx-1}{nx} \prec \frac{E(nx)}{nx} \le \frac{nx}{nx} \Rightarrow 1-\frac{1}{nx} \prec f_n(x) \le 1$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

Puisque : $1-\frac{1}{nx} \prec f_n(x) \le 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-\frac{1}{nx} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 1$

6) Etude de la limite de f_n en 0 :

a) Etude de la limite de f_n à droite en 0 :

$\forall x \in \left]0;\frac{1}{n}\right[$ on a : $0 \prec x \prec \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \prec nx \prec 1 \Rightarrow E(nx) = 0$

Donc : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx} = \frac{0}{nx} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0$

a) Etude de la limite de f_n à gauche en 0 :

$\forall x \in \left]-\frac{1}{n};0\right[$ on a : $-\frac{1}{n} \prec x \prec 0 \Rightarrow -1 \prec nx \prec 0 \Rightarrow E(nx) = -1$

Donc : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx} = \frac{-1}{nx}$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{nx} = +\infty$

Par suite : f_n n'a pas de limite en 0 :

7) a) Montrons que : $\lim\limits_{x \to 1^+} f_n(x) = 1$

$\forall x \in \left]1;1+\frac{1}{n}\right[$ On a : $1 \prec x \prec 1+\frac{1}{n} \Rightarrow n \prec nx \prec n+1 \Rightarrow E(nx) = n$

Donc : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx} = \frac{n}{nx} = \frac{1}{x}$

Donc : $\lim\limits_{x \to 1^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$

b) Montrons que : $\lim\limits_{x \to 1^-} f_n(x) = \frac{n-1}{n}$

$\forall x \in \left]1-\frac{1}{n};1\right[$ On a : $1-\frac{1}{n} \prec x \prec 1 \Rightarrow n-1 \prec nx \prec n \Rightarrow E(nx) = n-1$

Donc : $f_n(x) = \frac{E(nx)}{nx} = \frac{n-1}{nx}$

Donc : $\lim\limits_{x \to 1^-} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{n-1}{nx} = \frac{n-1}{n}$

Exercice5 : (7pts) : $(2\text{pt}+5\text{pt})$

ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \pi/2[2\pi]$. Soient I, J, K et L les milieux respectivement des segments $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$ et $[DA]$.

1) Déterminer les mesures des angles suivants :a) $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ b) $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)$ c) $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)$ d) $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$

2) Soit $S_{(AB)}$ la symétrie axiale d'axe (AB)

Soit $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$ et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a) $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$ b) $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

c) $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)}$ d) $K = r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{(D;\pi)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$

Solution :1) a) Les droites (AC) et (BD) et (JL) et (IK) sont des axes de symétries du carré ABCD

On a : $S_{(AC)}(A) = A$ et $S_{(AC)}(C) = C$ et $S_{(AC)}(B) = D$

Donc on déduit que : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) On a : $S_{(LJ)}(A) = D$ et $S_{(LJ)}(C) = B$ et $S_{(LJ)}(B) = C$

Donc on déduit que : $\left(\overline{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Puisque la rotation conserve la mesure de l'angle orienté et on a :

$r_{(O;\pi)}(A) = C$. $r_{(O;\pi)}(B) = D$ et $r_{(O;\pi)}(C) = A$ alors : $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

d) Puisque : $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ alors : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2)a) $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$??
On a : $(AC) \cap (BD) = \{O\}$
Donc F est le composé de deux symétries orthogonales d'axes qui se coupent en O
Donc : F est rotation de centre O
Et puisque : $(AC) \perp (BD)$ alors : F est une symétrie centrale de centre O ou $F = r_{(O;\pi)}$

2)b) $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$??
On a : $(AB) \cap (AC) = \{A\}$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$
Donc G est le composé de deux symétries orthogonales d'axes qui se coupent en A
Donc : G est rotation de centre A
$G = r_{\left(O;2\frac{\pi}{4}\right)} = r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$

2)c) $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)}$??
Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :
$r_{(D;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ et $r_{(A;\pi)} = S_{(DA)} \circ S_{(AB)}$
Donc : $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(DA)} \circ S_{(AB)}$
Et puisque : $S_{(DA)} \circ S_{(DA)} = I_P$ alors : $H = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$
Et puisque : $(DC) \parallel (AB)$ alors : H est une translation et puisque : $A \in (AB)$ et D la projection du point D sur la droite (DC) alors : $S_{(DC)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{AD}}$ donc : $H = t_{2\overrightarrow{AD}}$

d) $K = r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{(D;\pi)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$??
Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :
$r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(CA)} \circ S_{(CD)}$ et $r_{(D;\pi)} = S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$ car $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et on a : $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)}$
Donc : $K = S_{(CA)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AC)} = S_{(CA)} \circ I_P \circ I_P \circ S_{(AC)}$
Donc : $K = S_{(CA)} \circ S_{(AC)} = I_P$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien