http://www.xriadiat.com DS4: A PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : (1,5pt+1pt+0,5pt)

Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x(3+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\leq -2x$

b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\leq -4x^2$

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Solution : 1) Soit : $x\in\mathbb{R}^+$ On a : $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2-x^2-1}=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

On a : $x^2\prec x^2+1$ donc : $|x|=\sqrt{x^2}\prec\sqrt{x^2+1}$ et puisque on a : $x\in\mathbb{R}^+$ donc : $|x|=x$

Alors : $x\prec\sqrt{x^2+1}$ et donc : $2x\prec\sqrt{x^2+1}+x$ c'est-à-dire : $-\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\prec-2x$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\leq-2x$

b) Soit : $x\in\mathbb{R}^+$ on a ; $-1\leq\sin x$ donc : $2\leq 3+\sin x$ donc : $x(3+\sin x)\geq 2x$

Donc : $-2x^2(3+\sin x)\leq-4x^2$ et on a : $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\leq-2x$

Alors : $\frac{x(3+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}\leq-2x^2(3+\sin x)$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\leq-4x^2$

2)On a : $\forall x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)\leq-4x^2$ et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^2=-\infty$ Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

Exercice2 : (6,5pts) : (1,5pt+1,5pt+2pt+1,5pt)

Considérons la fonction f_m définie par : $f_m(x)=\frac{(m-1)x^2-1}{mx^2-(m+1)x+1}$ avec : $m\in\mathbb{R}_+^*$

1) Déterminer : suivant les valeurs de m : D_{f_m}

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_m(x)$

3) Déterminer : suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to1}f_m(x)$

4) Déterminer : suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}}f_m(x)$

Solution : 1) $D_{f_m}=\left\{x\in\mathbb{R}/mx^2-(m+1)x+1\neq0\right\}$

$mx^2-(m+1)x+1=0$; $\Delta=(m+1)^2-4m=m^2+2m+1-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2$

Donc : $x_1=\frac{m+1-m+1}{2m}=\frac{1}{m}$ et $x_2=\frac{m+1+m-1}{2m}=1$

Donc : $D_{f_m}=\mathbb{R}-\left\{1;\frac{1}{m}\right\}$

2) a) Calcul de : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(m-1)x^2-1}{mx^2-(m+1)x+1}$

Si : $m-1\neq0$ c'est-à-dire : $m\neq1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(m-1)x^2}{mx^2}=\frac{m-1}{m}=1-\frac{1}{m}$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(m-1)x^2}{mx^2}=\frac{m-1}{m}=1-\frac{1}{m}$

Si : $m=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f_m(x)=1-\frac{1}{m}$ $\forall m\in\mathbb{R}_+^*$

3) Détermination suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to1}f_m(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to1}f_m(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(m-1)x^2-1}{mx^2-(m+1)x+1}=\text{"}\frac{m-2}{0}\text{"}$

Détermination du signe de : $mx^2-(m+1)x+1$ et $m-2$

On a : $x_1=\frac{1}{m}$ et $x_2=1$ les racines de : $mx^2-(m+1)x+1$

$\frac{1}{m}-1=\frac{1-m}{m}$

Si : $0\prec m\prec1$; $\frac{1}{m}-1\succ0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m}\succ1$ Donc :

x	$-\infty$		1		$1/m$		$+\infty$
$mx^2-(1+m)x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to1^+}f_m(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^+}mx^2-(m+1)x+1=0^-$ et $m-2\prec0$

$\lim\limits_{x\to1^-}f_m(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^+}mx^2-(m+1)x+1=0^+$ et $m-2\prec0$

Si : $1\prec m\prec2$; $\frac{1}{m}-1\prec0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m}\prec1$ et $m-2\prec0$

Donc :

x	$-\infty$		$1/m$		1		$+\infty$
$mx^2-(1+m)x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to1^+}f_m(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^+}mx^2-(m+1)x+1=0^+$ et $m-2\prec0$

$\lim\limits_{x\to1^-}f_m(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^+}mx^2-(m+1)x+1=0^-$ et $m-2\prec0$

Si : $1=m$; $f_1(x)=\frac{-1}{x^2-2x+1}=\frac{-1}{(x-1)^2}$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}f_m(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$

Si : $2=m$; $f_2(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-3x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+1}{2x-1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}f_m(x)=2$

Si : $2\prec m$; $\frac{1}{m}-1\prec0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m}\prec1$ et $m-2\succ0$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^+}f_m(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^+}mx^2-(m+1)x+1=0^+$ et $m-2\succ0$

$\lim\limits_{x\to1^-}f_m(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^+}mx^2-(m+1)x+1=0^-$ et $m-2\succ0$

4) Détermination suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}}f_m(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}}\frac{(m-1)x^2-1}{mx^2-(m+1)x+1}=\text{"}\frac{\frac{-m^2+m-1}{m^2}}{0}\text{"}$

Pour : $-m^2+m-1$; $\Delta=-3\prec0$ et donc : $-m^2+m-1\prec0$

Si : $0\prec m\prec1$; $\frac{1}{m}-1\succ0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m}\succ1$ Donc :

x	$-\infty$		1		$1/m$		$+\infty$
$mx^2-(1+m)x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^+}f_m(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^+}mx^2-(m+1)x+1=0^+$ et $\frac{-m^2+m-1}{m^2}\prec0$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^-}f_m(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^-}mx^2-(m+1)x+1=0^-$ et $\frac{-m^2+m-1}{m^2}\prec0$

Si : $1\prec m$; $\frac{1}{m}-1\prec0$ c'est-à-dire : $\frac{1}{m}\prec1$ et $\frac{-m^2+m-1}{m^2}\prec0$

Donc :

x	$-\infty$		$1/m$		1		$+\infty$
$mx^2-(1+m)x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^+}f_m(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^+}mx^2-(m+1)x+1=0^-$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^-}f_m(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{m}^-}mx^2-(m+1)x+1=0^+$

Exercice3 : (6pts) : (1pt + 0,5pt+0,5pt+1pt+1pt+0,5pt+0,5pt+0,5pt+0,5pt) Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases}f(x)=\frac{E(x)-x+1}{x^2-4} & ;\ si\ \ x\geq0\\ f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1} & ;\ si\ \ x\prec0\end{cases}$

1) Déterminer : D_f 2) a) Vérifier que : $f(x)=\frac{3-x}{x^2-4}$ si $x\in\left]2;3\right[$

b) Vérifier que : $f(x)=\frac{2-x}{x^2-4}$ si $x\in\left]1;2\right[$

c) Etudier la limite de f en 2

3) a) Montrer que : $0\prec f(x)\leq\frac{1}{x^2-4}$; $\forall x\in\left]2;+\infty\right[$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

4) a) Calculer la limite de f à gauche de 0

b) Calculer la limite de f à droite de 0

5) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\ et\ x^2-4\neq0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec0\ et\ 1-x\geq0\ et\ \sqrt{1-x}-1\neq0\right\}$

On a : $x^2-4=0\Leftrightarrow\cancel{x=-2}\ ou\ x=2$

On a : $\sqrt{1-x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow1-x=1\Leftrightarrow x=0$

On a : $1-x\geq0\Leftrightarrow x\leq1$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq0\ et\ x\neq2\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec0\right\}$ c'est-à-dire : $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

2) a) Vérifions que : $f(x)=\frac{3-x}{x^2-4}$ si $x\in\left]2;3\right[$

Si $x\in\left]2;3\right[$ alors : $E(x)=2\Rightarrow f(x)=\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}=\frac{2-x+1}{x^2-4}=\frac{3-x}{x^2-4}$

b) Vérifions que : $f(x)=\frac{2-x}{x^2-4}$ si $x\in\left]1;2\right[$

Si $x\in\left]1;2\right[$ alors : $E(x)=1\Rightarrow f(x)=\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}=\frac{1-x+1}{x^2-4}=\frac{2-x}{x^2-4}$

c) Etudions la limite de f en 2 :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3-x}{x^2-4}=\text{"}\frac{1}{0}\text{"}$

Donc : $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2-x}{x^2-4}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ F.I

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-1}{x+2}=\frac{-1}{4}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 2

3) a) Montrons que : $0\prec f(x)\leq\frac{1}{x^2-4}$; $\forall x\in\left]2;+\infty\right[$

Soit : $x\in\left]2;+\infty\right[$

On a: $\forall x\in\left]2;+\infty\right[$ $f(x)=\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}$ et on a: $x-1\prec E(x)\leq x$

Donc : $-1\prec E(x)-x\leq0$ et $0\prec E(x)-x+1\leq1$ et on a : $x\succ2\Rightarrow x^2-4\succ0$

Donc : $0\prec\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}\leq\frac{1}{x^2-4}$ c'est-à-dire : $0\prec f(x)\leq\frac{1}{x^2-4}$; $\forall x\in\left]2;+\infty\right[$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Puisque on a : $0\prec f(x)\leq\frac{1}{x^2-4}$; $\forall x\in\left]2;+\infty\right[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

4) a) Calcule de la limite de f à gauche de 0

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\left(\sqrt{1-x}+1\right)\sin x}{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\left(\sqrt{1-x}+1\right)\sin x}{1-x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}-\left(\sqrt{1-x}+1\right)\times\frac{\sin x}{x}=-2\times1=-2$ car $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1$

b) Calculer la limite de f à droite de 0

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}$

Si $x\in\left]0;1\right[$ alors : $E(x)=0$ donc : $\frac{E(x)-x+1}{x^2-4}=\frac{0-x+1}{x^2-4}=\frac{-x+1}{x^2-4}$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x+1}{x^2-4}=\frac{0+1}{0-4}=-\frac{1}{4}$

5) Montrons que : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

Si : $x\in\left]-\infty;0\right[$; $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}$

Donc : $|f(x)|=\left|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}\right|=|\sin x|\frac{1}{\left|\sqrt{1-x}-1\right|}$

or on a : $x\prec0\Rightarrow-x\succ0\Rightarrow1-x\succ1\Rightarrow\sqrt{1-x}\succ1\Rightarrow\sqrt{1-x}-1\succ0$ et $|\sin x|\leq1$

Donc : $|f(x)|=|\sin x|\frac{1}{\sqrt{1-x}-1}\leq\frac{1}{\sqrt{1-x}-1}$ Si : $x\in\left]-\infty;0\right[$

Puisque on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}-1}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

Exercice4 : (4,5pts) : (2pt + 2,5pt) ABC est un triangle tel que la mesure principale de l'angle : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ est positif.

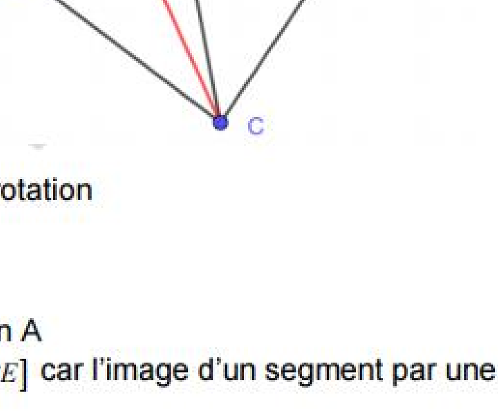
On construit à l'extérieur de ce triangle deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ et $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$

On considère le point I le milieu du segment $[CD]$ et J le milieu du segment $[BE]$

1) Montrer que : $BE=CD$ et $(BE)\perp(CD)$

2) Montrer que : le triangle AIJ est isocèle et rectangle en A

Solution :



1) Montrons que : $BE=CD$ et $(BE)\perp(CD)$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\begin{cases}AD=AB\\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : ❶ $r(D)=B$

On a : $\begin{cases}AC=AE\\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : ❷ $r(C)=E$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de❶ et ❷ en déduit que $BE=CD$

Comme on a : $r(D)=B$ et $r(C)=E$ et $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation

Alors : $\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE)\perp(CD)$

2) Montrons que : le triangle AIJ est isocèle et rectangle en A

On a : $r(D)=B$ et $r(C)=E$ donc : $r([DC])=[r(D)r(C)]=[BE]$ car l'image d'un segment par une rotation est un segment

Puisque : le point I le milieu du segment $[CD]$ alors le point $r(I)$ le milieu du segment $[BE]$

Alors : $r(I)=J$

Alors : $\begin{cases}AI=AJ\\ \left(\overline{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ Par suite : le triangle AIJ est isocèle et rectangle en A

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien