http://www.xriadiat.com **DS4: B** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (1,5pts) Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\forall x \in D_f)\ 0<|x|<\alpha \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$?

On a : $|f(x)|=\left|\frac{x}{x+1}\right|=\frac{1}{|x+1|}|x|$: On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $\frac{1}{|x+1|}|x|$

Soit : $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ donc : $-\frac{1}{2} \prec x \prec \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+1 \prec x+1 \prec \frac{1}{2}+1 \Rightarrow \frac{1}{2} \prec x+1 \prec \frac{3}{2}$

Donc : $|f(x)|=\left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 2|x|$ si $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $0<|x|<\alpha \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

Pour avoir $|f(x)|<\varepsilon$ il suffit d'avoir $2|x| \prec \varepsilon$ et $|x| \prec \frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $|x| \prec \frac{\varepsilon}{2}$ et $|x| \prec \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\alpha=\inf\left(\frac{\varepsilon}{2};\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \left(\alpha=\inf\left(\frac{\varepsilon}{2};\frac{1}{2}\right)\right) 0<|x|<\alpha \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Exercice2 : (1pts) : Déterminer : $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\cos x}{x^3-1}$

Solution : Soit : $x \in \mathbb{R}^{*-}$:

Donc : $\left|\frac{\cos x}{x^3-1}\right|=\left|\frac{1}{x^3-1}\right| \times |\cos x| \leq \left|\frac{1}{x^3-1}\right|$ car $|\cos x| \leq 1$

Donc : $\left|\frac{\cos x}{x^3-1}-0\right| \leq \frac{1}{1-x^3} \leq -\frac{1}{x^3}\quad \forall x \in \mathbb{R}^{*-}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to -\infty} -\frac{1}{x^3}=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\cos x}{x^3-1}=0$

Exercice3 : (3,5pts) : (0,5pts+1pts+1pts+1pts) : Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{E(x)+\sin x}{x} \ ;\ si \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) Déterminer : D_f

2) Etudier la limite de f en 0

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*\ ;\quad |f(x)-1| \leq \frac{2}{|x|}$

4) Déduire la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

2)

- Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$????

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{E(x)+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{E(x)}{x}+\frac{\sin x}{x}$$

Soit $x \in]0;1[$; donc : $E(x)=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{E(x)}{x}+\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0}{x}+\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$????

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{E(x)+\sin x}{x}$ on a : $\lim\limits_{x\to 0^-}\sin x=\sin 0=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}E(x)=-1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

Alors la fonction f n'admet pas de limite en 0

3) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*\ ;\quad |f(x)-1| \leq \frac{2}{|x|}$

Soit $x \in]0;+\infty[$; $|f(x)-1|=\left|\frac{E(x)+\sin x}{x}-1\right|=\left|\frac{E(x)+\sin x-x}{x}\right|=\frac{|E(x)+\sin x-x|}{|x|}$

$$|f(x)-1| \leq \frac{|E(x)-x|}{|x|}+\frac{|\sin x|}{|x|}$$

On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x$ donc : $-1 \prec E(x)-x \leq 0 \leq 1$ donc : $|E(x)-x| \leq 1$

Donc : $|f(x)-1| \leq \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|}$ c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}^*\ ;\quad |f(x)-1| \leq \frac{2}{|x|}$

4) Puisque : $|f(x)-1| \leq \frac{2}{|x|}$ et $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{2}{|x|}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=0$

Exercice4 : (3,5pts) : (1pts+1pts+1,5pts) Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{2-x}+3x$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}}$

Solution :1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$

On a $\lim\limits_{x\to 2} -x^3+2x^2+x-2=0$ et $\lim\limits_{x\to 2} -x^2+5x-6=0$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

→2 est racine du polynôme : $-x^3+2x^2+x-2$ donc : $-x^3+2x^2+x-2$ est divisible par $x-2$

La division euclidienne de $-x^3+2x^2+x-2$ par $x-2$ donne : $-x^3+2x^2+x-2=(x-2)(1-x^2)$

→2 est racine du polynôme : $-x^2+5x-6$ donc : $-x^2+5x-6$ est divisible par $x-2$

La division euclidienne de $-x^2+5x-6$ par $x-2$ donne : $-x^2+5x-6=(x-2)(-x+3)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(1-x^2)}{(x-2)(-x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1-x^2}{-x+3}=\boxed{-3}$$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{2-x}+3x=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(|x|\frac{\sqrt{2-x}}{x}+3\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}x\left(-\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}+3\right)=-\infty$ car :

$$\lim_{x\to -\infty} -\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}+3=-0+3=3$$

3) $\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{\sqrt{1+x^2}^2-\sqrt{1-x^2}^2}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$

$$=\frac{1+x^2-1+x^2}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\frac{2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}^2-\sqrt{1-2x}^2\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\frac{2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{(x+1-1+2x)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{3x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2}{3}x\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}x\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=0$$

Exercice5 : (2pts) : Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m la limite suivante :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}$$

Solution : Calculons $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}$ avec $m \in \mathbb{R}$

On pose : $f(x)=\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}$

$m^2-1=0 \Leftrightarrow m^2=1 \Leftrightarrow m=-1\ ou\ m=1$

→Si $m=1$: $f(x)=\frac{-x+5}{3x+1}$

Alors cette limite devient :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{3x}=\boxed{-\frac{1}{3}}$$

→Si $m=-1$: $f(x)=\frac{-2x^2-x+5}{3x+1}$

Alors cette limite devient :

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2x^2}{3x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2}{3}x=\boxed{+\infty}$$

→Si : $m\neq -1$ et $m\neq 1$:Alors : le terme de plus haut degré du polynôme est : $(m^2-1)x^3$

m	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$m2-1$	+ 0 − 0 +

- ✓ Si : $m \in]-1;1[$: alors : $m^2-1 \prec 0$:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(m^2-1)x^3}{3x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{3}(m^2-1)x^2=\boxed{-\infty}$$

- ✓ Si : $m \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: alors : $m^2-1 \succ 0$:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+5}{3x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(m^2-1)x^3}{3x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{3}(m^2-1)x^2=\boxed{+\infty}$$

Exercice6 : (3,5pts) : $(0{,}5pt+1pt+1pt+1pt)$ Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}=1\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$ On montre que : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

En effet : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$ On pose $x-\frac{\pi}{6}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h\to 0$

$$x-\frac{\pi}{6}=h \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+h$$

Donc : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=2\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=2\times 1=2$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ Directement on trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}\right)=\lim\limits_{h\to 0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cosh}{\frac{h^2}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$ (On pose $\sqrt{x}=h$)

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2+3x-7}+2x+5$

On a : $\lim\limits_{x\to -\infty}4x^2+3x-7=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2+3x-7}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}2x+5=-\infty$

On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x\right)+5=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+3x-7}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3x-7}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+3x-7}-2x}\right)+5$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4x^2+3x-7-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x-7}-2x}\right)+5=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2+3x-7}-2x}\right)+5=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-2x}\right)+5$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{-x\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-2x}\right)+5=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3-\frac{7}{x}}{-\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-2}\right)+5=\left(\frac{3-0}{-\sqrt{4+0-0}-2}\right)+5=-\frac{3}{4}+5=\boxed{\frac{17}{4}}$$

Exercice7 : (4pts) : $(0{,}5pt+1pt+1pt+1{,}5pt)$

ABC est un triangle isocèle et rectangle de sommet A tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ Soient I est le milieu du segment $[BC]$

Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Faire une figue

2) a) Déterminer : $r(A)$ et $r(C)$

b) Déterminer : $r((BC))$

3) Soit : E et F deux points du plan tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

Montrer que : EFI est un triangle isocèle et rectangle

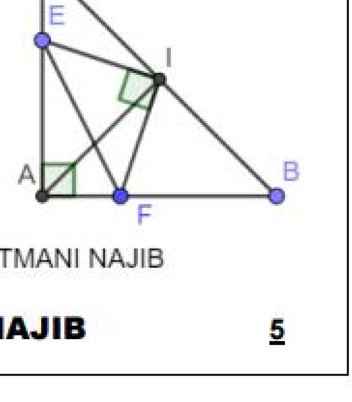
Solution :1) Voir figue

2) a) Déterminons : $r(A)$ et $r(C)$

Puisque ABC est un triangle rectangle de sommet A et I est le milieu du segment $[BC]$

Alors : $IA=IB=IC$

Puisque ABC est un triangle isocèle de sommet A et I est le milieu du segment $[BC]$



Prof:ATMANI NAJIB

Alors : (IA) est la médiatrice du segment $[BC]$

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overline{\overrightarrow{ICA},\overrightarrow{IA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où : $\begin{cases} IA=IB \\ \left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} IC=IA \\ \left(\overline{\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Par suite : $r(A)=B$ et $r(C)=A$

b) Déterminons : $r((BC))$

On a : $r(I)=I$ et $r(C)=A$ donc : $r((CI))=(AI)$ et puisque : car $I\in(BC)$

Alors : $r((BC))=(AI)$

3)Montrons que : EFI est un triangle isocèle et rectangle

Posons : $r(E)=E'$

On a : $r(A)=B$ et $r(C)=A$ et $r(E)=E'$ et $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Alors : $\overrightarrow{BE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité

On a : $\overrightarrow{BE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ donc : $\overrightarrow{BE'}=\overrightarrow{BF}$

Donc : $E'=F$

Par conséquent : $r(E)=F$

Par suite : $\begin{cases} IE=IF \\ \left(\overline{\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : EFI est un triangle isocèle et rectangle

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien