http://www.xriadiat.com **DS4: C** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : $(1,5\text{pts})$: Soit la fonction : $f: x \mapsto x^2+7x-8$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

Solution Montrons que : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ (\forall x \in D_f)\ |x-1|<\alpha \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$?

On a : $|f(x)|=|x^2+7x-8|=|(x-1)(x+8)|=|x-1||x+8|$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $|x-1||x+8|$

Soit : $x\in]0;2[$ donc : $0\prec x\prec 2 \Rightarrow 8\prec x+8\prec 10 \Rightarrow -10\prec x+8\prec 10 \Rightarrow |x+8|\prec 10$

Donc : $|f(x)|\le 10|x-1|$ si $x\in]0;2[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $|x-1|<\alpha \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

Pour avoir $|f(x)|<\varepsilon$ il suffit d'avoir $10|x-1|\prec \varepsilon$ c'est à dire : $|x-1|\prec \frac{\varepsilon}{10}$ et $|x-1|\prec 1$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{10}$ et 1 c'est-à-dire : $\alpha=\inf\left(\frac{\varepsilon}{10};1\right)$

Donc : $\forall \varepsilon \succ 0\ \exists \alpha \succ 0\ \left(\alpha=\inf\left(\frac{\varepsilon}{10};1\right)\right)|x-1|<\alpha \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

Exercice2 : $(1,5\text{pts})$ Etudier la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}$

Solution : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}$; On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\sqrt{1+x^2}+1=2$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{-x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}-\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)=-2$

Et puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}\ne \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}$ alors : la fonction $x\mapsto \frac{x|x|}{\sqrt{1+x^2}-1}$ n'admet pas de limites en0

Exercice3 : (3pts) : $(1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$: Déterminer les limites suivantes :

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}$ 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-\sqrt{1+x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}$

On a $\lim\limits_{x\to 1} x^3+2x-3=0$ et $\lim\limits_{x\to 1} x^2+2x-3=0$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a : →1 est racine du polynôme : x^3+2x-3 donc : x^3+2x-3 est divisible par $x-1$

La division euclidienne de x^3+2x-3 par $x-1$ donne : $x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)$

→1 est racine du polynôme : x^2+2x-3 donc : x^2+2x-3 est divisible par $x-1$

La division euclidienne de x^2+2x-3 par $x-1$ donne : $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+3}{x+3}=\frac{5}{4}$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-\sqrt{1+x}=\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(2-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 2-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=2$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}$: On utilise le conjugué du numérateur, on aura :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x-x-1}{x\left(\sqrt{1+3x}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{x+1}}=1$$

Exercice4 : $(4,5\text{pts})$: $(0,5\text{pts}+1,5\text{pts}+1,5\text{pts}+1\text{pts})$:

Considérons la fonction f définie par : $f(x)=4x\tan 2x-\frac{\pi}{\cos 2x}$

1) Déterminer : D_f 2) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f(x)=\frac{4x\sin(2x)-\pi}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}$

4) En déduire : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ 2x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\ne\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Soit : $x\in D_f$ on a ; $f(x)=4x\tan 2x-\frac{\pi}{\cos 2x}=4x\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\pi}{\cos 2x}=\frac{4x\sin 2x-\pi}{\cos 2x}=\frac{4x\sin 2x-\pi}{2\cos^2 x-1}$

$$f(x)=\frac{4x\sin 2x-\pi}{2\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4x\sin 2x-\pi}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

3) a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}$ On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$ e t $x-\frac{\pi}{4}=h\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+h$

$4x\sin(2x)-\pi=4\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)-\pi=(4h+\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-\pi=(4h+\pi)\cos(2h)-\pi$

$4x\sin(2x)-\pi=4h\cos(2h)+\pi(1-\cos(2h))$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{4h\cos(2h)+\pi(1-\cos(2h))}{h}=\lim\limits_{h\to 0}4\cos(2h)+4\pi h\left(\frac{1-\cos(2h)}{(2h)^2}\right)=4+0\times\frac{1}{2}=4$

4) Déduction de : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x\sin(2x)-\pi}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{4x\sin(2x)-\pi}{x-\frac{\pi}{4}}}{\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}}\times\frac{1}{2\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{4}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=-2$$

Exercice5 : $(4,5\text{pts})$: $(0,5\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0,5\text{pt}+1\text{pt})$:

Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x-E(x)}{x+E(x)}$ 1) Déterminer : D_f

2) a) Montrer que : $f(x)=1$ si $x\in]0;1[$

b) Montrer que : $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ si $x\in]-1;0[$

c) Etudier la limite de f en 0

3) a) Montrer que : $0\prec f(x)\le\frac{1}{x+1}$; $\forall x\in]1;+\infty[$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

4) Encadrer $f(x)$; si $x\in]-\infty;-1[$ et en déduire : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Solution : 1) $f(x)=\frac{x-E(x)}{x+E(x)}$

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ x+E(x)\ne 0\}$

On a : $x+E(x)=0\Leftrightarrow E(x)=-x$

Puisque $E(x)\in\mathbb{Z}$ alors : $-x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

$E(x)=-x\Leftrightarrow x=-x\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

2) a) Montrons que : $f(x)=1$ si $x\in]0;1[$

Soit $x\in]0;1[$ donc : $E(x)=0$ et donc : $f(x)=\frac{x-0}{x+0}=1$

b) Montrons que : $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ si $x\in]-1;0[$

Soit $x\in]-1;0[$ donc : $E(x)=-1$ et donc : $f(x)=\frac{x-(-1)}{x+(-1)}=\frac{x+1}{x-1}$

c) Etudions la limite de f en 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 1=\boxed{1}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{0+1}{0-1}=\boxed{-1}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 0

3) a) Montrons que : $0\prec f(x)\le\frac{1}{x+1}$; $\forall x\in]1;+\infty[$

Soit $x\in]1;+\infty[$ donc : $x\succ 1\Rightarrow E(x)\ge 1$ (la partie entière est une fonction croissante)

Donc : $E(x)+x\ge x+1$ c'est-à-dire : $E(x)+x\ge x+1\ 0\prec\frac{1}{E(x)+x}\le\frac{1}{x+1}$ ①

On a aussi : $E(x)\le x\prec E(x)+1$ donc : $0\le x-E(x)\prec 1$ ②

① et ② $\Rightarrow 0\le\frac{x-E(x)}{x+E(x)}\prec\frac{1}{x+1}$ c'est-à-dire : $0\prec f(x)\le\frac{1}{x+1}$; $\forall x\in]1;+\infty[$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

On a : $\forall x\in]1;+\infty[$; $0\prec f(x)\le\frac{1}{x+1}$ et puisque : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x+1}=0$

Alors : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

4) Encadrement de $f(x)$; si $x\in]-\infty;-1[$ et en déduction de : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Soit $x\in]-\infty;-1[$

On a : $E(x)\le x\prec E(x)+1$ donc : $x-1\prec E(x)\le x$

Donc : $2x-1\prec E(x)+x\le 2x$

Donc : $-2x\le -(E(x)+x)\prec -2x+1$ et $-x\le -E(x)\prec 1-x$

Et par suite : $0\le\frac{x-E(x)}{-(x+E(x))}\le\frac{1}{-2x}$ c'est-à-dire : $0\le -f(x)\le -\frac{1}{2x}$

Donc : $\frac{1}{2x}\le f(x)\le 0$ et puisque : $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{2x}=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

Exercice6 : (5pts) : $(1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+2\text{pt})$: Soient A et B deux points d'n cercle (C) de centre O

On considère un point M du cercle (C) distinct de A et B

Les droites (D) et (D') sont respectivement les médiatrices des segments $[AM]$ et $[BM]$

1) Déterminer la nature de la transformation : $S_{(D')}\circ S_{(D)}$

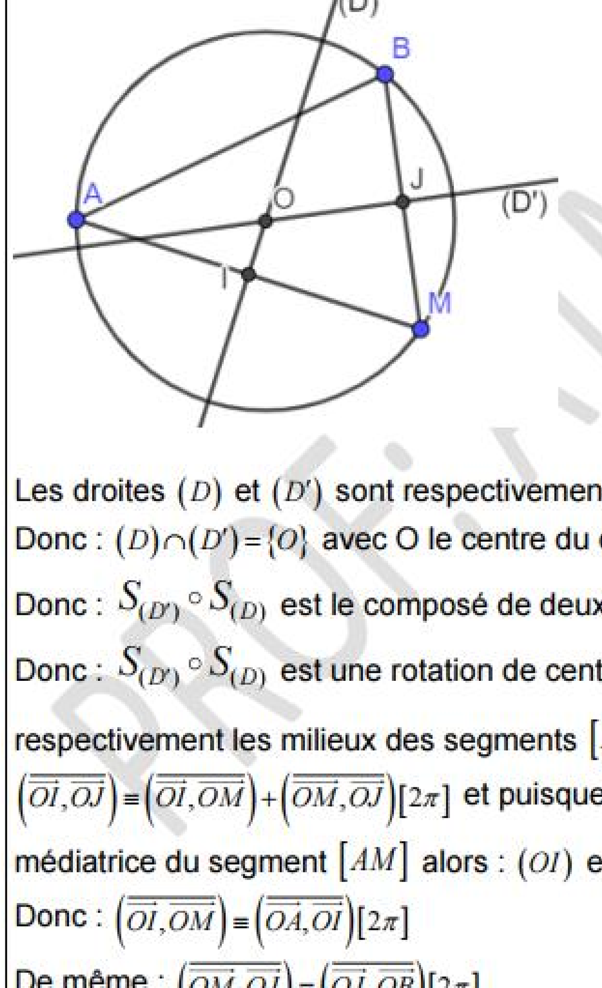
2) Déterminer la nature de la transformation : $S_{(BM)}\circ S_{(AM)}$

3) Soit G le centre de gravité du triangle ABM

On désigne par : A' ; B' et M' les images respectives des points A ; B et M par $S_{(D)}\circ S_{(D')}$

Déterminer $\left(S_{(D)}\circ S_{(D')}\right)(G)$

Solution :1)



Les droites (D) et (D') sont respectivement les médiatrices des segments $[AM]$ et $[BM]$

Donc : $(D)\cap(D')=\{O\}$ avec O le centre du cercle (C)

Donc : $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ est le composé de deux symétries axiales d'axes qui se coupent en O

Donc : $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ est une rotation de centre O et d'angle : $2\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)$ avec : I et J sont respectivement les milieux des segments $[AM]$ et $[BM]$ et on a :

$\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OJ}}\right)[2\pi]$ et puisque : le triangle OAM est isocèle en O et (OI) est la médiatrice du segment $[AM]$ alors : (OI) est une bissectrice de l'angle AOM

Donc : $\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}}\right)[2\pi]$

De même : $\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$

Par suite : $2\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$

Donc : $S_{(D')}\circ S_{(D)}$ est rotation de centre O et d'angle $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

2) Déterminons la nature de la transformation : $S_{(BM)}\circ S_{(AM)}$

On a : $(AM)\cap(BM)=\{M\}$

Donc : $S_{(BM)}\circ S_{(AM)}$ est une rotation de centre M et d'angle : $2\left(\overline{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)$

Et puisque : $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ est un angle inscrit associé a l'angle au centre AOB

Alors : $2\left(\overline{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$

Par suite : $S_{(BM)}\circ S_{(AM)}$ est une rotation de centre M et d'angle : $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

3)Déterminons : $\left(S_{(D)}\circ S_{(D')}\right)(G)$

Posons : $S_{(D')}\circ S_{(D)}=r$: r est la rotation de centre O et d'angle $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$

On a : $r(A)=A'$ e ;t $r(B)=B'$ et $r(M)=M'$

Et puisque : G le centre de gravité du triangle ABM et la conserve le barycentre

Alors : $r(G)=G'$ le centre de gravité du triangle $A'B'M'$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien