1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (1pts) Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$; déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ et $0 \leq 1+\sin x \leq 2$ donc $\left|\dfrac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}\right| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Donc : $|f(x)| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ par suite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice2 : (5pts) : $(5\times 1\text{pts})$ Calculer et étudier les limites suivantes I :

1) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x^3+x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+|x-2|-4}{x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1-3x-2x^2\right)^2\left(5x^2+2\right)^2}{(x-1)^3\left(2x^2-8x+5\right)^2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x^3+x-2}$; $\lim\limits_{x\to-1} x^2-1=0$ et $\lim\limits_{x\to-1} x^3+x-2=0$

On trouve une forme indéterminée : "$\dfrac{0}{0}$"

En utilisant la division euclidienne : $x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)$

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^3+x-2} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(x^2+x+2\right)} = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{x^2+x+2} = \frac{1}{2}$$

2) $$\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x} = \frac{\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}\right)\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)} = \frac{\left(\left(2\sqrt{x+1}\right)^2-\sqrt{x+4}^2\right)}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)} = \frac{4(x+1)-(x+4)}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{4x+4-x-4}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)} = \lim_{x\to0} \frac{3x}{x\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}\right)} = \lim_{x\to0} \frac{3}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}} = \frac{3}{4}$$

3) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+|x-2|-4}{x-2}$ On trouve une forme indéterminée : "$\dfrac{0}{0}$"

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$x-2$	$-$ 0 $+$

a) $$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{x^2+|x-2|-4}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{x^2+x-2-4}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{x^2-4+x-2}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{(x-2)(x+2)+x-2}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{x^2+|x-2|-4}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} x+3 = 5$$

b) $$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{x^2+|x-2|-4}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{x^2-(x-2)-4}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{(x-2)(x+2)-(x-2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} x+1 = 3$$

Et puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{x^2+|x-2|-4}{x-2} \neq \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{x^2+|x-2|-4}{x-2}$ Alors : la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+|x-2|-4}{x-2}$ n'admet pas de limites en 2

4) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$; $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times x^2}}{\dfrac{\sin x}{x}\times x} = \dfrac{|x|\times\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}}{\dfrac{\sin x}{x}\times x} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}}{\dfrac{\sin x}{x}}$ avec $|x| = x$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}}{\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-3x-2x^2\right)^2\left(5x^2+2\right)^2}{(x-1)^3\left(2x^2-8x+5\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2x^2\right)^2\left(5x^2\right)^2}{(x)^3\left(2x^2\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{100x^8}{4x^7} = \lim_{x\to+\infty} 25\,x = +\infty$$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+x-2}+3x-1$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 9x^2+x-2=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+x-2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x-1=-\infty$

On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2+x-2}+3x\right)-1 = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{9x^2+x-2}+3x\right)\left(\sqrt{9x^2+x-2}-3x\right)}{\sqrt{9x^2+x-2}-3x}\right)-1$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{9x^2+x-2-9x^2}{\sqrt{9x^2+x-2}-3x}\right)-1 = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-2}{\sqrt{9x^2+x-2}-3x}\right)-1 = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3x}\right)-1$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{9+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3x}\right)-1 = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{9+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-3}\right)-1 = \left(\frac{1-0}{-\sqrt{9+0-0}-3}\right)-1 = -\frac{1}{6}-1 = \boxed{-\frac{7}{6}}$$

Exercice3 : $(2{,}5\text{pts})$: Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{m(x-1)^2+(m-1)\left(x^3-3x\right)}{3x^2-5x+7}$$

Solution : Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{m(x-1)^2+(m-1)\left(x^3-3x\right)}{3x^2-5x+7}$; avec $m \in \mathbb{R}$

On pose : $f(x) = \dfrac{m(x-1)^2+(m-1)\left(x^3-3x\right)}{3x^2-5x+7}$

→Si $m=1$: $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{3x^2-5x+7} = \dfrac{x^2-2x+1}{3x^2-5x+7}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{m(x-1)^2+(m-1)\left(x^3-3x\right)}{3x^2-5x+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{3x^2-5x+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

→Si $m \neq 1$:

Alors : le terme de plus haut degré du polynôme est : $(m-1)\left(x^3-3x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{m(x-1)^2+(m-1)\left(x^3-3x\right)}{3x^2-5x+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(m-1)\left(x^3-3x\right)}{3x^2-5x+7}$$

- ✓ Si $m \succ 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{m(x-1)^2+(m-1)\left(x^3-3x\right)}{3x^2-5x+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(m-1)x^3}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}(m-1)x = +\infty$

Si $m \prec 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{m(x-1)^2+(m-1)\left(x^3-3x\right)}{3x^2-5x+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(m-1)x^3}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}(m-1)x = -\infty$

Exercice4 : (3pts) : $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$:

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = E(x)+\sin x$

1) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2) Etudier la limite de f en 0

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On sait que : $x-1 \prec E(x) \leq x$ donc : $-1 \prec \sin(x) \leq 1$ donc : $x-2 \prec E(x)+\sin x \leq x+1$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2 = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

On peut même utiliser une propriété : si on a : $f+g$ et $f \xrightarrow[x_0]{} +\infty$ et g minoré $\Rightarrow f+g \xrightarrow[x_0]{} +\infty$

$f+g$ et $f \xrightarrow[x_0]{} -\infty$ et g majoré $\Rightarrow f+g \xrightarrow[x_0]{} -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ = ???

Soit : $x \succ 0$

On a : $x-2 \prec E(x)+\sin x \leq x+1 \Rightarrow \dfrac{x-2}{x} \prec \dfrac{E(x)+\sin x}{x} \leq \dfrac{x+1}{x}$ et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

2)

- Calculons : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$????

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} E(x)+\sin x$ et on a : $\lim\limits_{x\to0^+} E(x) = E(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \sin x = \sin 0 = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0+0 = 0$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$????

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} E(x)+\sin x$ et on a : $\lim\limits_{x\to0^-} E(x) = 0-1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \sin x = \sin 0 = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -1+0 = -1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 0

Exercice5 : $(8{,}5\text{pts})$: $(1\text{pt}+2{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt})$:

ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}}\right)$ négatif. Soient M, N, P et Q quatre points dans le plan tels que : $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

La droite (AN) coupe les droites (DM) et (BP) respectivement en E et F

La droite (CQ) coupe les droites (DM) et (BP) respectivement en H et G

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$

1) Faire une figure dans le cas ou : $AB = 6cm$

2) Montrer que : $r(M) = N$ et $r(N) = P$ et $r(P) = Q$ et $r(Q) = M$

3) a) Montrer que : $r(F) = G$

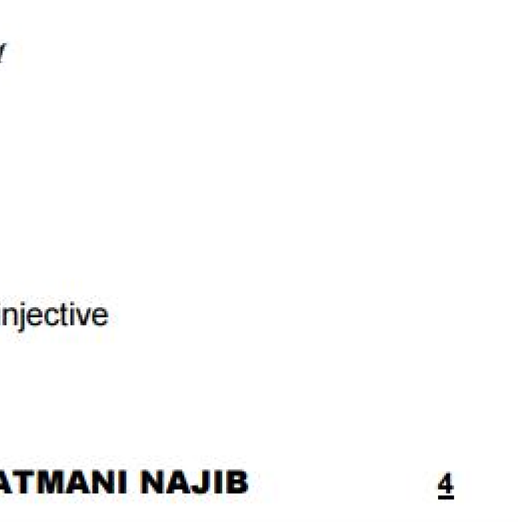
b) En déduire que : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

4)a) Calculer : $(r\circ r)(F)$ et $(r\circ r)(E)$

4)b) En déduire que : les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu

5) Montrer que : EFGH est un carré

Solution : 1) Voir figure



2) on a $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A) = B$

$\begin{cases} OB = OC \\ \left(\overline{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B) = C$

Et puisque $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{r(A)r(M)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{r(A)r(B)}$ c'est à dire : $\overrightarrow{Br(M)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et on a :

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc : $r(M) = N$

De meme : on montre que : $r(N) = P$ et $r(P) = Q$ et $r(Q) = M$

3) a) On montre que : $r(F) = G$?

Puisque : $r(N) = P$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et Puisque : $r(P) = Q$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et puisque : $r(P) = Q$ et $r(B) = C$ alors : $r((BP)) = (QC)$

Donc : $r((AN)\cap(BP)) = r((AN))\cap r((BP))$ car r est une application injective

Donc : $r(\{F\}) = (BP)\cap(QC) = \{G\}$ par suite : $r(F) = G$

3)b) On a : $r(F) = G$ donc : $\begin{cases} OF = OG \\ \left(\overline{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OG}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

4)a) On a : $r(C) = D$ et $r(Q) = M$ et $r(B) = C$ donc : $r((CQ)) = (DM)$ et puisque : $r((BP)) = (QC)$

Alors : $r((CQ)\cap(BP)) = (DM)\cap(CQ)$ cad : $r(\{G\}) = \{H\}$ donc : $r(G) = H$

On a : $(r\circ r)(F) = r(r(F)) = r(G) = H$ et on a $r((AN)) = (BP)$ et $r((DM)) = (AN)$

Donc : $r((AN)\cap(DM)) = (AN)\cap(BP)$

Donc : $r(E) = F$

On a : $(r\circ r)(EF) = r(r(E)) = r(F) = G$

4)b) Puisque r est une rotation d'angle : $-\pi/2$ alors : $r\circ r$ est une rotation d'angle : $2\times(-\pi/2) = -\pi$ donc $r\circ r$ est une symétrie centrale et soit K son centre

Puisque on a : $(r\circ r)(F) = H$ et $(r\circ r)(E) = G$

Alors : K est le milieu des segments $[EG]$ et $[FH]$

Donc : les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux

4) Puisque les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux alors : $EFGH$ est un parallélogramme et on a aussi : $r(F) = G$ et $r(E) = F$ donc : $EF = FG$ et $\left(\overline{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{FG}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : EFGH est un carré.

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien