http://www.xriadiat.com **DS4: F** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : $(1,5\text{pts})$: Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x}{x-3}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to1} f(x) = -\frac{1}{2}$

Solution Montrons que : $\forall\varepsilon \succ 0\ \exists\alpha \succ 0\ (\forall x\in D_f)\ |x-1| < \alpha \Rightarrow \left|f(x)+\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$?

On a : $\left|f(x)+\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x}{x-3}+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2x+x-3}{x-3}\right| = \frac{3}{2}\left|\frac{x-1}{x-3}\right| = \frac{3}{2}\left|(x-1)\frac{1}{x-3}\right| = \frac{3}{2}|x-1|\left|\frac{1}{x-3}\right|$

On va ajouter une condition pour pouvoir majorer : $\frac{3}{2}|x-1|\left|\frac{1}{x-3}\right|$

Soit : $x \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ donc : $\frac{1}{2} \prec x \prec \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}-3 \prec x-3 \prec \frac{3}{2}-3 \Rightarrow -\frac{5}{2} \prec x-3 \prec -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \prec |x-3| \prec \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} \prec \frac{2}{3}$

Donc : $\left|f(x)+\frac{1}{2}\right| \le 1|x-1|$ si $x \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$

Soit $\varepsilon \succ 0$ on cherche $\alpha \succ 0$ tel que : $|x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$

Pour avoir $\left|f(x)+\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $|x-1| \prec \varepsilon$ et $|x-1| \prec \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : ε e t$\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\alpha = \inf\left(\varepsilon;\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\forall\varepsilon \succ 0\ \exists\alpha \succ 0\ \left(\alpha = \inf\left(\varepsilon;\frac{1}{2}\right)\right)|x-1| < \alpha \Rightarrow \left|f(x)+\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

Donc : $\lim_{x\to1} f(x) = -1$

Exercice2 : (6pts) : $(1\text{pt}+2\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$: Considérons la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}}$, $g(x) = \sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1}$

1) Déterminer : D_f

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to0^+} f(x)$

3) Monter que la fonction f admet une limite en $x_0 = 1$

4) Calculer : $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

Solution : 1) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}}$

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x-\sqrt{x} \neq 0 \ et\ x \ge 0\right\}$

$x-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0\ ou\ \sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=0\ ou\ x=1$

$D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$

2) Calculons : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\to \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x\sqrt{\frac{2}{x}}}{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{2}{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$

Car : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

$\to \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}}$; on a : $\lim_{x\to0^+}\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x} = 1$ et $\lim_{x\to0^+} x-\sqrt{x} = 0^-$

Car : $x-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) \prec 0$ si $x\in]0;1[$

Par conséquent : $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}} = -\infty$

3) Montrons que la fonction f admet une limite en $x_0 = 1$:

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2x}\right)}$

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}(x-1)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2x}\right)}$

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2x}\right)} = \frac{0\times2}{2\sqrt{2}} = \boxed{0}$

Donc : la fonction f admet une limite en $x_0 = 1$ c'est **0**

4) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1}$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$; $|x| = -x$ Car : $x\to-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{2x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right) = "+\infty\times\left(1-\sqrt{2}\right) = -\infty$

Exercice3 : (3pts) : $(0{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1\text{pts})$ Considérons la fonction f définie par :

$f(x) = \sin x \times E\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) Etudier la limite de f en 0

3) Etudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$

Solution : 1) $D_f = \{x\in\mathbb{R}/x\neq0\} = \mathbb{R}-\{0\}$

2) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\sin x\times E\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times x\times E\left(\frac{1}{x}\right)$

On a : $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

- Calculons : $\lim_{x\to0^+} x\times E\left(\frac{1}{x}\right)$????

Soit $x\in]0;+\infty[$; On sait que : $x-1 \prec E(x) \le x \Rightarrow \frac{1}{x}-1 \prec E\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x} \Rightarrow 1-x \prec xE\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$

Puisque : $\lim_{x\to0^+} 1-x = 1$ et $\lim_{x\to0^+} 1 = 1$ alors : $\lim_{x\to0^+} x\times E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

Par suite : $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1\times1 = 1$

- Calculons : $\lim_{x\to0^+} x\times E\left(\frac{1}{x}\right)$????

Soit $x\in]-\infty;0[$; On sait que : $x-1 \prec E(x) \le x \Rightarrow \frac{1}{x}-1 \prec E\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x} \Rightarrow 1 \le xE\left(\frac{1}{x}\right) \prec 1-x$

Puisque : $\lim_{x\to0^-} 1-x = 1$ et $\lim_{x\to0^-} 1 = 1$ alors : $\lim_{x\to0^-} x\times E\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

Par suite : $\lim_{x\to0^-} f(x) = 1\times1 = 1$

Puisque : $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x)$ alors la fonction f admet une limite en 0

Et $\lim_{x\to0} f(x) = 1$

2) On doit faire une simplification de : $f(x)$

Soit $x \succ 1 \Rightarrow 0 \prec \frac{1}{x} \prec 1 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x\times E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$

Soit $x \prec -1 \Rightarrow -1 \prec \frac{1}{x} \prec 0 \Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \Rightarrow f(x) = \sin x\times E\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin x$

Donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\sin x$ n'existe pas

Exercice4 : (3pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt})$:

Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m la limite suivante :

$\lim_{x\to+\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-(m-1)x+11$

Solution : Calculons $\lim_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-(m-1)x+11$ avec $m\in\mathbb{R}$

$m^2-m=0 \Leftrightarrow m(m-1)=0 \Leftrightarrow m=0\ ou\ m-1=0 \Leftrightarrow m=0\ ou\ m=1$

→Si : $m=0$

Alors cette limite devient : $\lim_{x\to-\infty} x+11 = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

→Si : $m=1$

Alors cette limite devient : $\lim_{x\to-\infty} x^2+11 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

→Si : $m\neq1$ et $m\neq0$: Alors : le terme de plus degré du polynôme est : $\left(m^2-m\right)x^3$

m	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$m2-m$	+	0	−	0	+

- ✓ Si : $m\in]0;1[$: alors : $m^2-m \prec 0$:

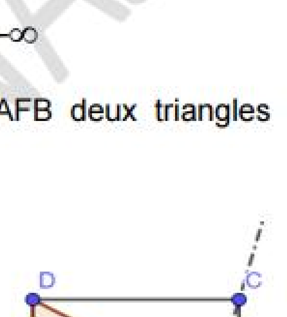
  $\lim_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-(m-1)x+11 = \lim_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3 = +\infty$

- ✓ Si : $m\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$: alors : $m^2-m \succ 0$:

  $\lim_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-(m-1)x+11 = \lim_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3 = -\infty$

Exercice5 : (2pts) : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés



Solution : Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$: $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par r

On a : $r(B) = F$ Car $\begin{cases} AB = AF \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D) = E$ Car $\begin{cases} AD = AE \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K) = C$

Donc : $AK = AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Puisque : $AB = BC$ donc B appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et $AD = DC$ donc D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et on a : $AK = AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignements des points alors:les points : E et C et F sont alignés

Exercice6 : $(4{,}5\text{pts})$: $(1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$:

Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle (C) tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit M un point de l'arc AC ne contenant pas le point B (M distincts de A et C)

Soit I un point appartenant au segment $[BM]$ tel que : $IM = AM$

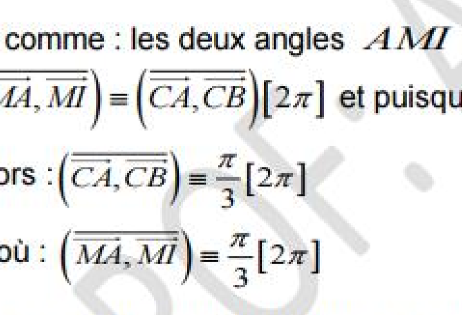
1) Montrer que : AIM est un triangle équilatéral.

2) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer : $r(B)$ et $r(I)$

b) En déduire que : $MA+MC = MB$

Solution : 1) a) Montrons que : AIM est un triangle équilatéral.



Prof:ATMANI NAJIB

On a : $IA = IM$ donc : AIM est un triangle isocèle de sommet M

Et comme : les deux angles AMI et ACB interceptent le même arc AB alors :

$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MI}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$ et puisque ABC est un triangle équilatéral

Alors : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MI}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On a : AIM est un triangle isocèle et l'un ses angles mesure : $\frac{\pi}{3}$

Donc : AIM est un triangle équilatéral

2) a) Déterminons : $r(B)$ et $r(I)$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

On a : $\begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} AI = AM \\ \left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AM}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(B) = C$ et $r(I) = M$

b) Déduisons que :

On a : $I\in[BM]$ donc : $BM = IB+IM$ (1)

On a aussi : $r(B) = C$ et $r(I) = M$

Alors : $IB = MC$ (2) car la rotation conserve les distances

Et comme : AIM est un triangle équilatéral

Alors : $IM = MA$ (3)

De : (1) ; (2) et (3) on en déduit que : $MA+MC = IM+IB = BM$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien