http://www.xriadiat.com DS4: G PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (2pts) $(1{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt})$: Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

1) Montrer que : $\forall x\succ 0 : \left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|\prec\dfrac{1}{x^2}$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\succ 0 : \left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|\prec\dfrac{1}{x^2}$

Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$; $f(x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2x-x-\sqrt{1+x^2}}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}=\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}=\dfrac{x^2-(1+x^2)}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

Donc : $f(x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}$

Donc : $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{-1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}\right|=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}$: il suffit de prouver que : $2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2\succ x^2$

En effet on a : $\sqrt{1+x^2}\succ 0$ alors : $x+\sqrt{1+x^2}\succ x\succ 0$ et comme la fonction : $x\mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ alors : $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2\succ x^2$ donc : $2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2\succ 2x^2$ et puisque : $2x^2\succ x^2$

D'où : $2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2\succ x^2$ et par suite : $\dfrac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}\prec\dfrac{1}{x^2}$

Donc : $\forall x\succ 0 : \left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|\prec\dfrac{1}{x^2}$

2) Déduction :

On a : $\forall x\succ 0 : \left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|\prec\dfrac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

Donc : d'après la propriété de limites et ordre : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$

Exercice2 : $(6{,}5\text{pts})$: $(0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$: Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x^2+12x^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2+1}}$ 3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+1}{-x^2+2x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}}$ 6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{\left|x^2-x-2\right|}$ 7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\dfrac{\pi}{4}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2-1\right)^4}{x-3x^5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2\right)^4}{-3x^5}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x^3}{3}=+\infty$

2) On a : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2+1}}="\dfrac{1}{0}"$ déterminons le signe de : $1-\sqrt{x^2+1}$

On a : $x^2+1\geq 0$ donc : $\sqrt{x^2+1}\geq 0\succ 1$ par suite : $\sqrt{x^2+1}\succ 1$ et donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $1-\sqrt{x^2+1}\prec 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2+1}}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+1}{-x^2+2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+1}{-\left(x^2-2x+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+1}{-(x-1)^2}$ et on a : $\lim\limits_{x\to1}-3x+1=-2$ et $\lim\limits_{x\to1}-(x-1)^2=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3x+1}{-x^2+2x-1}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$: On a : $\lim\limits_{x\to2}x^2+x-6=0$ et $\lim\limits_{x\to2}x^2-3x+2=0$

On trouve une forme indéterminée : $"\dfrac{0}{0}"$

En utilisant la division euclidienne on trouve : $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ et $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3}{x-1}=5$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}}$ On a : $x^2+1\leq 1+x^2+x^4$ donc : $\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{1+x^2+x^4}$

Par suite : $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}\leq 0$ et on a : $\lim\limits_{x\to0}x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1+x^2+x^4}}=-\infty$

6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{\left|x^2-x-2\right|}$ On a : $\left|x^2-x-2\right|\geq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{\left|x^2-x-2\right|}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-1}x=-1$ et $\lim\limits_{x\to-1}\left|x^2-x-2\right|=0^+$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\dfrac{\pi}{4}}$ On pose $x-\dfrac{\pi}{4}=h$ donc : $x\to\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to 0$ e t $x-\dfrac{\pi}{4}=h\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+h$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\dfrac{\pi}{4}}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right)-\sqrt{2}}{h}$: $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos(\mathrm{h})-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin(\mathrm{h})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(\mathrm{h})-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\mathrm{h})$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\dfrac{\pi}{4}}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(\mathrm{h})-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\mathrm{h})\right)-\sqrt{2}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{2}\cos(\mathrm{h})-\sqrt{2}\sin(\mathrm{h})-\sqrt{2}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}-\sqrt{2}h\dfrac{1-\cos(\mathrm{h})}{h^2}+\sqrt{2}\dfrac{\sin(\mathrm{h})}{h}=-\sqrt{2}\times 0\times\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\times 1=-\sqrt{2}$

Exercice3 : $(1{,}5\text{pts})$ $(1\text{pt}+0{,}5\text{pt})$: Soit la fonction $f : x\mapsto\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}$

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}f(x)$

2) La fonction f admet-elle une limite en : $x_0=1$?

Solution :1) Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{-(x-1)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}\dfrac{\left(\sqrt{3+x^2}-2\right)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}{-(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}\dfrac{3+x^2-4}{-(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}\dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{3+x^2}+2}=-\dfrac{1}{2}$

2) Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}\neq\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}$

Alors : la fonction $x\mapsto\dfrac{\sqrt{3+x^2}-2}{|x-1|}$ n'admet pas de limites en $x_0=1$

Exercice4 : $(2{,}5\text{pts})$: $(1{,}5\text{pts}+1\text{pts})$

1) Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(m+1)x^3+2mx^2-x+7$

2) Calculer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to+\infty}3x^n-x^3+(n-1)x^2+7$

Solution : a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(m+1)x^3+2mx^2-x+7$ avec $m\in\mathbb{R}$

→Si : $m+1=0$ c'est-à-dire : $m=-1$:

Alors cette limite devient : $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^2-x+7=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^2=-\infty$

→Si : $m\neq-1$ c'est-à-dire : $m=-1$:

Alors : le terme de plus degré du polynôme est : $(m+1)x^3$

- ✓ Si : $m\succ-1$: alors : $m+1\succ 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(m+1)x^3+2mx^2-x+7=\lim\limits_{x\to+\infty}(m+1)x^3=\boxed{+\infty}$
- ✓ Si : $m\prec-1$: alors : $m+1\prec 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(m+1)x^3+2mx^2-x+7=\lim\limits_{x\to+\infty}(m+1)x^3=\boxed{-\infty}$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-(m-1)x+11$ avec $m\in\mathbb{R}$

$m^2-m=0\Leftrightarrow m(m-1)=0\Leftrightarrow m=0\ ou\ m-1=0\Leftrightarrow m=0\ ou\ m=1$

→Si : $m=0$

Alors cette limite devient : $\lim\limits_{x\to-\infty}x+11=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

→Si : $m=1$

Alors cette limite devient : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+11=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

→Si : $m\neq 1$et $m\neq 0$: Alors : le terme de plus degré du polynôme est : $\left(m^2-m\right)x^3$

m	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$m2-m$	+ 0 − 0 +

- ✓ Si : $m\in]0;1[$: alors : $m^2-m\prec 0$:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-(m-1)x+11=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3=+\infty$
- ✓ Si : $m\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$: alors : $m^2-m\succ 0$:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3+mx^2-(m-1)x+11=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(m^2-m\right)x^3=-\infty$

2) Calculons suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to+\infty}3x^n-x^3+(n-1)x^2+7$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

- ✓ Si : $n\succ 3$et $n\in\mathbb{N}^*$: alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^n-x^3+(n-1)x^2+7=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^n=+\infty$
- ✓ Si : $n=3$et $n\in\mathbb{N}^*$: alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^n-x^3+(n-1)x^2+7=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^3-x^3+(n-1)x^2+7$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+(n-1)x^2+7=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$

Si : $0\prec n\prec 3$et $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^n-x^3+(n-1)x^2+7=\lim\limits_{x\to+\infty}-x^3=-\infty$

Exercice5 : (2pts) : $(0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt})$: Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+x+1}-3x$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x^3$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x$

Solution : Remarque : En général on commence par un calcul direct pour voir si c'est une Forme indéterminée ou non.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+x+1}-3x$ On trouve une forme indéterminée : $"+\infty-\infty"$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+x+1}-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3x$ or : $|x|=x$ car $x\mapsto+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+x+1}-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3\right)=-\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x^3$: On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x^3=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x$

Méthode : On utilise le conjugué, en écrivant 2x sous la forme x + x.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2-x-x^2\right)}{\sqrt{x^2-x}+x}+\dfrac{\left(x^2+x-x^2\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)}+\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1\right)}$

car $|x|=x$ puisque : $x\mapsto+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\boxed{0}$

Exercice6 : $(5{,}5\text{pts})$: $(0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$: IAB est un triangle isocèle et rectangle en I tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)$ positif.

On trace à l'extérieur du triangle ABC un parallélogramme ABCD puis à l'extérieur du parallélogramme ABCD un carré BFEC

Soit r la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

1) Construire une figure

2) a) Montrer que : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Soit le point D' l'image du point D par la rotation r

Montrer que : $D'=F$ et $BD'=BF$

3) Montrer que : $CD=BE$

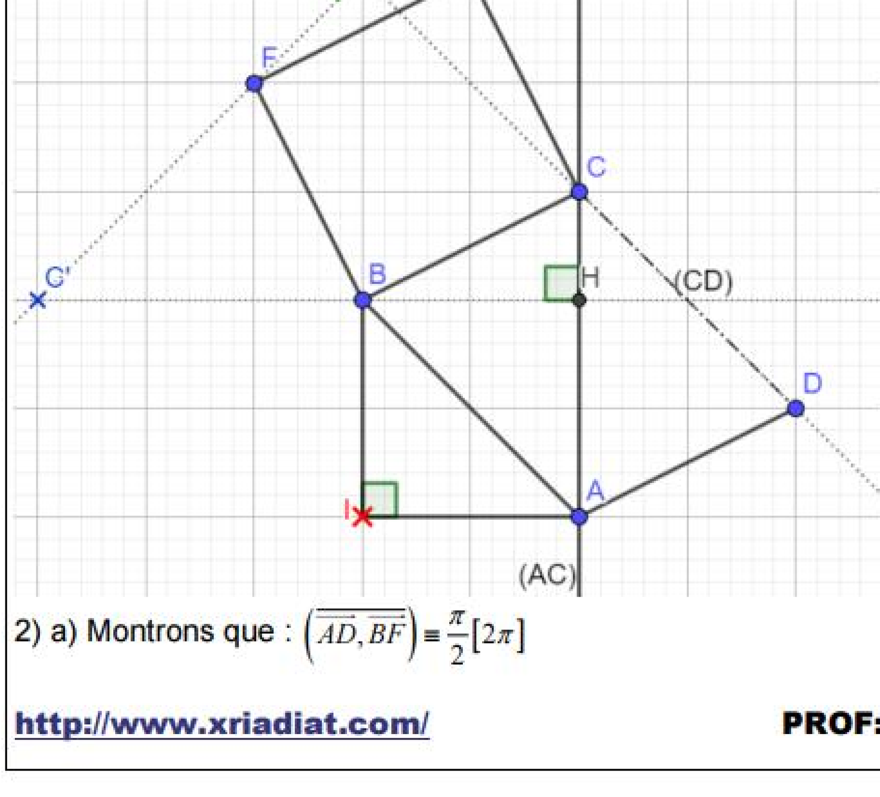
4) On considère le point H le projeté orthogonale du point B sur la droite (AC)

Et le point H' est le projeté orthogonale du point F sur la droite (CD)

a) Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par la rotation r

b) Déterminer C' l'image du point C par la rotation r et construire C'

Solution :1) Voir figure



2) a) Montrons que : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

On a : BFEC est un carré direct donc : $\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

On a aussi : ABCD un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

Par suite : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}}\right)[2\pi]\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

b) Soit le point D' l'image du point D par la rotation r

Montrons que : $D'=F$ et $BD'=BF$

On a : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ❶ et comme : $AD=BC$ car $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $BC=BF$ ❷ car BFEC est un carré

Alors : $AD=BF$

De : ❶ et ❷ en déduit que : $r(D)=F$ car : $r(A)=B$ et on a : $r(D)=D'$

Donc : $D'=F$ et $BD'=BF$

4)a) Déterminons les images des droites (AC) et (CD) par la rotation r

→ On a : $\begin{cases}IA=IB\\ \left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : $r(A)=B$ et $H\in(AC)$

Donc : l'image de la droite (AC) par la rotation r passe par B et perpendiculaire a (AC)

Et comme : le point H est le projeté orthogonale du point B sur la droite (AC)

Alors : l'image de la droite (AC) par la rotation r est la droite (BH)

→ On a : $r(D)=F$

Donc : l'image de la droite (CD) par la rotation r passe par F et perpendiculaire a (CD)

Et comme : le point H' est le projeté orthogonale du point F sur la droite (CD)

Alors : l'image de la droite (CD) par la rotation r est la droite (FH')

b) Déterminons C' l'image du point C par la rotation r et construire C'

On a : C est le point d'intersection des droites (AC) et (CD)

Or $r((AC))=(BH)$ et $r((CD))=(FH')$ donc C' l'image du point C est le point d'intersection des droites (BH) et (FH')

D'où la construction du point C'

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien