http://www.xriadiat.com **DS4: H** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(0{,}5\text{pt}\times 6)$:

Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-3} & ;\ si\quad x\prec 3 \\ f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x} & ;\ si\quad x\succ 3 \end{cases}$

Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Solution : a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2-x+1}{x-3}$: puisque : $\lim\limits_{x\to3^-}2x^2-x+1=16$ et $\lim\limits_{x\to3^-}x-3=0^-$

Donc : $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2-x+1}{x-3}=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x}$: puisque : $\lim\limits_{x\to3^+}x^3-x^2+1=19$ et $\lim\limits_{x\to3^+}x^2-3x=0$

Tableau de signe de : x^2-3x

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to3^+}x^2-3x=0^+$

Donc : $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x}\times\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-3}\times\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

Exercice2 : (3pts) : Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx$

Solution : On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3x+5=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}-mx=+\infty\ ou\ 0\ ou\ -\infty$ suivant le réel m

→Si : $m=0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty$

→Si : $m\prec 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}-mx=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=+\infty$

→Si : $m\succ 0$:

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-mx$

Or : $|x|=x$ car $x\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-m\right)$ On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=1$

- ✓ Si : $0\prec m\prec 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-m=1-m\succ 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=+\infty$

- ✓ Si : $m\succ 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-m=1-m\prec 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=-\infty$

- ✓ Si : $m=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-3x+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+5-x^2}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+5}{\sqrt{x^2-3x+5}+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-3+\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1}=-\dfrac{3}{2}$

Conclusion :

→Si : $m\prec 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=+\infty$

→Si : $m=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=-\dfrac{3}{2}$

→Si : $m\succ 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+5}-mx=-\infty$

Exercice3 : (2,5pts) : $(0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x^2\times E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) Etudier la limite de f en 0

3) Etudier la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq0\}=\mathbb{R}-\{0\}$

2) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2\times E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{0\}$;

On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x\Rightarrow\dfrac{1}{x}-1\prec E\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq\dfrac{1}{x}\Rightarrow x^2\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\leq x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq x^2\dfrac{1}{x}$

Donc : $x-x^2\leq x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq x$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0}x=0$ et $\lim\limits_{x\to0}x-x^2=0$ alors : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

3) Soit $x\in\mathbb{R}-\{0\}$

Calcule de : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Methode1 : On a : $x-x^2\leq x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq x$ et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Methode2 : Soit $x\prec-1\Rightarrow-1\prec\dfrac{1}{x}\prec0\Rightarrow E\left(\dfrac{1}{x}\right)=-1\Rightarrow f(x)=x^2\times E\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2\times(-1)=-x^2$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2=-\infty$

Calcule de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Soit $x\succ1\Rightarrow0\prec\dfrac{1}{x}\prec1\Rightarrow E\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\Rightarrow f(x)=x^2\times E\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2\times0=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$

Exercice4 : (7,5pts) : $(1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt})$:

Considérons la fonction f_n définie par : $f_n(x)=\dfrac{(1-x^2)^n}{(1-x)(1-x^2)....(1-x^n)}$ avec : $n\in\mathbb{N}^*$

1) Simplifier : $f_1(x)$ et $f_2(x)$ et $f_3(x)$

2) Montrer que : $D_{f_n}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

3) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+1} f_n(x)=\dfrac{2^n}{1\times2\times3\times....\times n}$

4) a) Montrer que :si n est impair alors : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{1-x^n}=0$

b) Montrer que :si n est pair alors : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{1-x^n}=\dfrac{2}{n}$

c) Montrer par récurrence que : $\lim\limits_{x\to-1} f_n(x)=0$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

4) Discuter suivant les valeurs de n : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

Remarque : $1-x^n=(1-x)\left(1+x+x^2+....+x^{n-1}\right)$

Solution : 1) Simplification de : $f_1(x)$ et $f_2(x)$ et $f_3(x)$

$f_1(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{1-x}=1+x$

$f_2(x)=\dfrac{(1-x^2)^2}{(1-x)(1-x^2)}=\dfrac{1-x^2}{1-x}=1+x$

$f_3(x)=\dfrac{(1-x^2)^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=\dfrac{(1-x^2)^2}{(1-x)(1-x^3)}$ or : $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$

Donc : $f_3(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}\times\dfrac{1-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\dfrac{(1+x)^2}{1+x+x^2}=\dfrac{1+2x+x^2}{1+x+x^2}$

2) Montrons que : $D_{f_n}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$D_{f_n}=\left\{x\in\mathbb{R}/(1-x)(1-x^2)....(1-x^n)\neq0\right\}$

On considère l'équation : $(1-x)(1-x^2)....(1-x^n)=0$

$(1-x)(1-x^2)....(1-x^n)=0\Rightarrow1-x=0\ ou\ 1-x^2=0\ ou\ 1-x^k=0$ avec $3\leq k\leq n\Rightarrow x=1\ ou\ x=-1$

Inversement :1 et -1 sont solutions si $n\geq2$

Donc : $D_{f_n}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

3) Montrons que : $\lim\limits_{x\to+1} f_n(x)=\dfrac{2^n}{1\times2\times3\times....\times n}$

On a : $1-x^k=(1-x)\left(1+x+x^2+....+x^{k-1}\right)$

Donc : $f_n(x)=\dfrac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n(1+x)(1+x+x^2)....(1+x+x^2+...+x^{n-1})}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+1} f_n(x)=\dfrac{2^n}{2\times3\times....\times n}=\dfrac{2^n}{1\times2\times3\times....\times n}$

4) a) si n est impair alors : $n=2k+1$ avec : $k\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to-1}1-x^n=1-(-1)^n=1-(-1)^{2k+1}=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{1-x^n}=0$

a) si n est pair alors : $n=2k$ avec : $k\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to-1}1-x^n=1-(-1)^n=1-(-1)^{2k}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{1-x^n}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{1-x^{2k}}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{(1-x^2)\left(1+x^2+....+(x^2)^{k-1}\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{1+x^2+....+(x^2)^{k-1}}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{1-x^n}=\dfrac{1}{k}$ et puisque : $n=2k$ alors : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{1-x^n}=\dfrac{2}{n}$

c) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\lim\limits_{x\to-1} f_n(x)=0$

Pour : $n=1$; $f_1(x)=1+x$; $\lim\limits_{x\to-1} f_n(x)=\lim\limits_{x\to-1}1+x=0$ la ppté est vraie pour $n=1$

Supposons : $\lim\limits_{x\to-1} f_n(x)=0$

Montrons que : $\lim\limits_{x\to-1} f_{n+1}(x)=0$

On a : $f_{n+1}(x)=\dfrac{(1-x^2)^{n+1}}{(1-x)(1-x^2)....(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\dfrac{(1-x^2)^n}{(1-x)(1-x^2)....(1-x^n)}\dfrac{(1-x^2)}{(1-x^{n+1})}$

Donc : $f_{n+1}(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x^{n+1}}\times f_n(x)$ et puisque : $\lim\limits_{x\to-1} f_n(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-x^2}{1-x^{n+1}}=\dfrac{2}{n+1}$

Alors : $\lim\limits_{x\to-1} f_{n+1}(x)=0$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to-1} f_n(x)=0$

4) Discutons suivant les valeurs de n : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1+x=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2x+x^2}{1+x+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

Pour : $n=4$; On a : $f_{n+1}(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x^{n+1}}\times f_n(x)$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2}{1-x^4}\times f_3(x)$ mais : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2}{1-x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)=1$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x)=0$

Par suite : $\forall n\geq4$; On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$

Exercice5 : (4pts) : (2pt+2pt) ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$ positif

On considère les deux rotations suivantes : $r_1\left(O;\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $r_2(O;-\pi)$

1) Quelle est l'image du point A par la rotation : $r_2\circ r_1$

2) Quelle est l'image du cercle(C) de centre B et de rayon OA par la rotation $r_2\circ r_1$

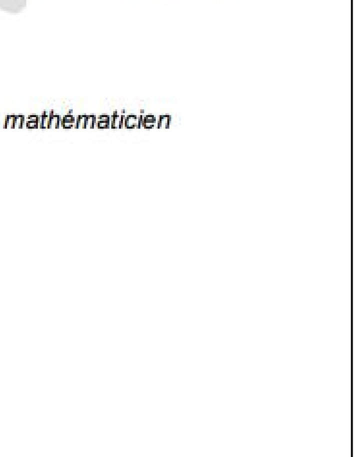
Solution : 1) Déterminons l'image du point A par la rotation : $r_2\circ r_1$

Méthode1 : Soit : $(r_2\circ r_1)(A)=A''$

On a : $A''=(r_2\circ r_1)(A)=r_2(r_1(A))$ et on a : $r_1(A)=B$ Car : $\begin{cases}OA=OB\\ \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

C'est-à-dire : $A''=r_2(B)$ et on a : $r_2(B)=D$ Car : $\begin{cases}OB=OD\\ \left(\overline{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv-\pi[2\pi]\end{cases}$

D'où : $(r_2\circ r_1)(A)=D$



Par suite l'image du point A par la rotation : $r_2\circ r_1$ est D

Méthode2 : $r_2\circ r_1$ est la rotation de centre O et d'angle : $\dfrac{\pi}{2}+(-\pi)=-\dfrac{\pi}{2}$

Donc : $r_2\circ r_1\left(O;-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$r_2\circ r_1(A)=D$ car $\begin{cases}OA=OD\\ \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

2) Déterminons l'image du cercle(C) de centre B et de rayon OA par la rotation $r_2\circ r_1$

On a : $r_2\circ r_1(B)=A$ car $\begin{cases}OB=OA\\ \left(\overline{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

D'où : l'image du cercle(C) de centre B et de rayon OA par la rotation $r_2\circ r_1$ est cercle(C) de centre A et de rayon OA

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien