http://www.xriadiat.com **DS4: J** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (5pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}\times 3)$:

1) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3}$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2 \prec f(x) \prec x^3+x^2$

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}$

Solution : 1) a) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $\left|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|x^2\right|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ car $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $\left|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0\right|\le x^2$ et comme : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

b) Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3}$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\frac{\cos x}{x^3}\right| = \left|\frac{1}{x^3}\right|\left|\cos x\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$ car $\left|\cos x\right|\le 1$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^*$: $\left|\frac{\cos x}{x^3}-1\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$ et comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x^3}\right| = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3} = 0$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2 \prec f(x) \prec x^3+x^2$

→Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2 \prec f(x) \prec x^3+x^2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3-3x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3+x^2 = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

→Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2 \prec f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

→Calcul de la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+ : x^3-3x^2 \prec f(x) \prec x^3+x^2$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}_*^+$: $1-\frac{3}{x} \prec \frac{f(x)}{x^3} \prec 1+\frac{1}{x}$

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{3}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3} = 1$

Exercice2 : (4pts) : $(1\text{pt}\times 4)$ Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+2x$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{4x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\cos(x-1)-1}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}+2x$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+2x = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+2x = \lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+2x = \lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+2x$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+2x = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2-\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right)$ et comme : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}+2x = \boxed{-\infty}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x$: on utilise la technique de la multiplication par l expression conjuguée

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+7}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+7}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+7}-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+7-4x^2}{\sqrt{4x^2+7}-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{7}{\sqrt{4x^2+7}-2x}$$

Comme : $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+7 = +\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7} = +\infty$ et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$

Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+7}+2x = \boxed{+\infty}$

3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{4x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{4x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{4x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{4x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{4}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{4x} = -\frac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\cos(x-1)-1} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2}{\cos h-1}$ On pose $x-1=h$ donc : $x\to 1 \Leftrightarrow h\to 0$

$= \lim\limits_{h\to 0} -\frac{h^2}{1-\cos h} = -2$ car : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$

Exercice3 : (6pts) : $(1\text{pt}\times 6)$: Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{|x|-1}{1-\left|2x^2-x\right|}$

1) Déterminer : D_f 2) Ecrire $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue :

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 4) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

5) Etudier la limite de f en 1 6) Etudier la limite de f en $-\frac{1}{2}$

Solution : 1) $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / 1-\left|2x^2-x\right| \ne 0\right\}$

On a : $1-\left|2x^2-x\right| = 0 \Leftrightarrow \left|2x^2-x\right| = 1 \Leftrightarrow 2x^2-x=1 \text{ ou } 2x^2-x=-1 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0 \text{ ou } 2x^2-x+1=0$

Pour : $2x^2-x-1=0$; $\Delta = 9 \succ 0$ donc : $x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Pour : $2x^2-x+1=0$; $\Delta = -7 \prec 0$

Donc : $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x\ne 1 \text{ et } x\ne -\frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

2) Ecrire $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue :

On a : $2x^2-x=0 \Leftrightarrow x(2x-1)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 2x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$1/2$		$+\infty$
$2x^2-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; On a : $|x| = x$ et $\left|2x^2-x\right| = 2x^2-x$ par suite : $f(x) = \frac{x-1}{1+x-2x^2}$

$\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$; On a : $|x| = x$ et $\left|2x^2-x\right| = -2x^2+x$ par suite : $f(x) = \frac{x-1}{1+2x^2-x}$

$\forall x\in\left]-\infty;0\right]$; On a : $|x| = -x$ et $\left|2x^2-x\right| = 2x^2-x$ par suite : $f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$

Donc : $\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{1+x-2x^2} & ; si \quad x\ge\frac{1}{2} \\ f(x) = \frac{x-1}{2x^2-x+1} & ; si \quad 0\le x\le\frac{1}{2} \\ f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1} & ; si \quad x\prec 0 \end{cases}$

3) Calcul de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{1+x-2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{-2x} = 0$

4) Calcul de : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x} = 0$

5) Etude de la limite de f en 1 :

On a : $f(x) = \frac{x-1}{1+x-2x^2}$; $si \quad x\ge\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1+x-2x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}$$

6) Etude de la limite de f en $-\frac{1}{2}$:

On a :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$

Exercice4 : (3pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$: ABCD est un parallélogramme

On construit à l'extérieur deux triangles ABE et ADF

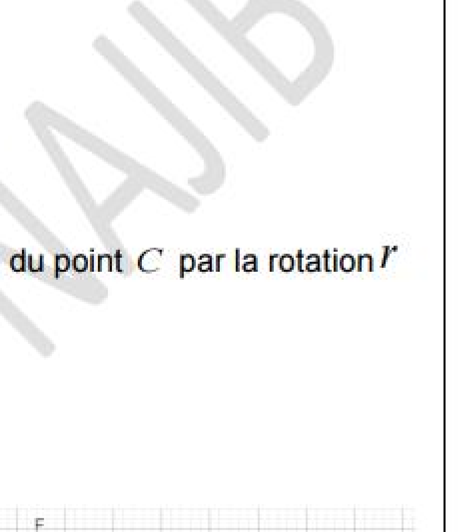
On considère la rotation r de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et soit C' l'image du point C par la rotation r

1) Montrer que : $AC' = AF$

2) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv 0[2\pi]$

3) En déduire que : $C' = F$

Solution : 1) On a : $r(B) = A$ et $r(C) = C'$



Donc : $AC' = BC$ et puisque : $AD = AF = BC$ alors $AC' = AF$

2) On a : $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\right) + \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et

comme ; $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Alors : $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC'}\right) \equiv 0[2\pi]$

3) Puisque on a : $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC'}\right) \equiv 0[2\pi]$ et $AC' = AF$ Alors :

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AF}$ c'est-à-dire : $C' = F$

Exercice5 : (2pts) : ABCD est un carré tel que :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ Positif et Soit r la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$

Décomposer la rotation r en composée de deux symétries orthogonales

Solution : $r = S_{(AD)}\circ S_{(AC)}$ car $(AD)\cap(AC) = \{A\}$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

OU $r = S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$ car $(AB)\cap(AC) = \{A\}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien