http://www.xriadiat.com DS4: K PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : $(3pts)$: $(1pt+2pt)$: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{3x^2-x-2}{x(x-1)(1-2x)}$

1) Déterminer : D_f

3) Calculer les limites aux bornes de D_f

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ x(x-1)(1-2x)\neq 0\}=]-\infty;0[\cup]0;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};1[\cup]1;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{-2x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{3}{2x}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{-2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{3}{2x}=0$

c) $\lim\limits_{x\to0} f(x)="\frac{-2}{0}"$

Étudions le signe de : $D(x)=x(x-1)(1-2x)$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)="\frac{-7/4}{0}"$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to1} f(x)="\frac{0}{0}"$ forme indéterminée

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{x(x-1)(1-2x)}\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+2)}{x(x-1)(1-2x)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x+2}{x(1-2x)}=-5$

Exercice2 : $(4pts)$: $(1pt\times4)$

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x} & ;si\quad x\geq0 \\ f(x)=\frac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x} & ;si\quad x\prec0 \end{cases}$

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 2) Etudier : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

3) a) Montrer que : $\forall x\prec0\ ;\ |f(x)|\leq\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$ b) En déduire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : 1) Déterminons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2+x}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2+x}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2+x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2+x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+1=1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\sqrt{1}=1$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

2) Etudions : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}}{2+x}$ et Puisque $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}-\sqrt{1+x^2}=-1$: et $\lim\limits_{x\to0^+}2+x=2$

  Alors : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\left(\cos x+\sqrt{1+\sin x}\right)\left(\cos x-\sqrt{1+\sin x}\right)}{x\left(\cos x+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cos^2x-1-\sin x}{x\left(\cos x+\sqrt{1+\sin x}\right)}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\left(\frac{\cos^2x-1}{x}-\frac{\sin x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-1}{\cos x+\sqrt{1+\sin x}}\left(x\frac{1-\cos^2x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}\right)=-\frac{1}{2}\times\left(0\frac{1}{2}+1\right)=\boxed{-\frac{1}{2}}$

3) a) Montrons que : $\forall x\prec0\ ;\ |f(x)|\leq\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

Soit $x\prec0$: $|f(x)|=\left|\frac{\cos x-\sqrt{1+\sin x}}{x}\right|=\frac{\left|\cos x-\sqrt{1+\sin x}\right|}{|x|}$ or : $\left|\cos x-\sqrt{1+\sin x}\right|\leq|\cos x|+\left|\sqrt{1+\sin x}\right|$

Donc : $|f(x)|\leq\frac{|\cos x|+\sqrt{1+\sin x}}{|x|}$ et comme : $|\cos x|\leq1$ et $-1\leq\sin x\leq1$

Donc : $|\cos x|\leq1$ et $0\leq\sin x+1\leq2$

Donc : $|\cos x|\leq1$ et $0\leq\sqrt{\sin x+1}\leq\sqrt{2}$

Donc : $|\cos x|+\sqrt{1+\sin x}\leq1+\sqrt{2}$

Par suite : $\frac{|\cos x|+\sqrt{1+\sin x}}{|x|}\leq\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

D'où : $\forall x\prec0\ ;\ |f(x)|\leq\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$

b) Déduisons : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On a : $\forall x\prec0\ ;\ |f(x)-0|\leq\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{2}}{|x|}=0$

Donc, d'après la propriété de limites et ordre: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Exercice3 : $(9pts)$: $(1pt\times9)$: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{xE(x)}{x+E(x)}$

1) a) Montrer que : $E(x)=-x\Leftrightarrow x=0$ b) En déduire : D_f

2) a) Simplifier $f(x)$ si $x\in]0;1[$

b) Vérifier que : $f(x)=\frac{x}{1-x}$ si $x\in]-1;0[$

c) Etudier la limite de f en 0

3) a) Montrer que : $\frac{x^2-x}{2x}\leq f(x)\leq\frac{x^2}{2x-1}$; $\forall x\in]1;+\infty[$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) Etudier la limite de f en 1

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $xE(x)=x+E(x)$

Solution : $f(x)=\frac{xE(x)}{x+E(x)}$

1) a) Montrons que : $E(x)=-x\Leftrightarrow x=0$

$\Rightarrow$) Supposons que : $E(x)=-x$

Puisque $E(x)\in\mathbb{Z}$ alors : $-x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

$E(x)=-x\Rightarrow x=-x\Rightarrow2x=0\Rightarrow x=0$

$\Leftarrow$) Supposons que : $x=0$

$E(0)=0=-0$

Finalement : $E(x)=-x\Leftrightarrow x=0$

b) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ x+E(x)\neq0\}$

On a : $x+E(x)=0\Leftrightarrow E(x)=-x\Leftrightarrow x=0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

2) a) Simplification de $f(x)$ si $x\in]0;1[$

Soit $x\in]0;1[$ donc : $E(x)=0$ et donc : $f(x)=\frac{xE(x)}{x+E(x)}=\frac{x\times0}{x+0}=0$

Donc : $f(x)=0$ si $x\in]0;1[$

b) Vérifions que : $f(x)=\frac{x}{1-x}$ si $x\in]-1;0[$

Soit $x\in]-1;0[$ donc : $E(x)=-1$ et donc : $f(x)=\frac{xE(x)}{x+E(x)}=\frac{xE(x)}{x+E(x)}=\frac{x\times(-1)}{x+(-1)}=\frac{-x}{x-1}=\frac{x}{1-x}$

Donc : $f(x)=\frac{x}{1-x}$ si $x\in]-1;0[$

c) Etudions la limite de f en 0

La limite de f à droite en 0 : On a $f(x)=0$ si $x\in]0;1[$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}0=\boxed{0}$

La limite de f à gauche en 0 : On a $f(x)=\frac{x}{1-x}$ si $x\in]-1;0[$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{1-x}=\boxed{0}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ alors : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

3) a) Montrons que : $\frac{x^2-x}{2x}\leq f(x)\leq\frac{x^2}{2x-1}$; $\forall x\in]1;+\infty[$

Soit $x\in]1;+\infty[$

On a : $E(x)\leq x\prec E(x)+1$

Donc : $2x-1\prec x+E(x)\leq2x$

Donc : $\frac{1}{2x}\leq\frac{1}{x+E(x)}\prec\frac{1}{2x-1}$

On a : $x-1\prec E(x)\leq x$ Donc : $x^2-x\prec xE(x)\leq x^2$

Donc : $\frac{x^2-x}{2x}\leq\frac{xE(x)}{x+E(x)}\leq\frac{x^2}{2x-1}$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\frac{x^2-x}{2x}\leq\frac{xE(x)}{x+E(x)}\leq\frac{x^2}{2x-1}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

4) Etude de la limite de f en 1

La limite de f à droite en 1 : On a si $x\in]1;2[$; $E(x)=1$ et donc : $f(x)=\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x}{x+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$

La limite de f à gauche en 1 :

On a si $x\in]0;1[$; $E(x)=0$ et donc : $f(x)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}0=\boxed{0}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 1

5) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $xE(x)=x+E(x)$

$xE(x)=x+E(x)\Leftrightarrow xE(x)-E(x)=x\Leftrightarrow(x-1)E(x)=x\quad:\ (E)$

Si : $x=1$ (E) devient : $0=1$ impossible donc : $x\neq1$

$(E)\Leftrightarrow E(x)=\frac{x}{x-1}\Leftrightarrow E(x)=\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow E(x)=1+\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow E(x)-1=\frac{1}{x-1}$

Puisque : $E(x)\in\mathbb{Z}$ donc : $E(x)-1\in\mathbb{Z}$ et donc : $\frac{1}{x-1}\in\mathbb{Z}$

Donc : $\exists k\in\mathbb{Z}^*$ tel que : $\frac{1}{x-1}=k$ et donc : $x-1=\frac{1}{k}$ c'est-à-dire : $x=\frac{1}{k}+1$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$

Inversement :

Si $k\succ1$ alors $0\prec\frac{1}{k}\prec1\Rightarrow1\prec\frac{1}{k}+1\prec2\Rightarrow1\prec x\prec2\Rightarrow E(x)=1$

(E) Devient : $x-1=x\Leftrightarrow-1=0$ impossible

Si $k\leq-1$ alors $-1\leq\frac{1}{k}\prec0\Rightarrow0\leq\frac{1}{k}+1\prec1\Rightarrow0\leq x\prec1\Rightarrow E(x)=0$

(E) Devient : $0=x$ impossible car $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

Si $k=1$ alors : $\frac{1}{x-1}=k\Leftrightarrow\frac{1}{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$

(E) Devient : $(2-1)E(2)=2\Leftrightarrow E(2)=2$ vraie donc : $x=2$ solution

Conclusion : $S=\{2\}$

Exercice4 : $(4pts)$: $(1,5pt+1,5pt+1pt)$:

On considère un cercle(C) circonscrit a un triangle équilatéral ABC tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit M un point de l'arc AC ne contenant pas le point B

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Soit P un point appartenant au segment $[BM]$ tel que : $MP=MA$

a) Montrer que : AMP est un triangle équilatéral.

b) Montrer que : M est l'image du point P par la rotation r

2) En déduire que : $MA+MC=MB$

Solution : 1) a) Montrons que : AMP est un triangle équilatéral.

On a : $MP=MA$ d'où : $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PA}\right)[2\pi]$

Et comme :les deux angles AMP et ACB interceptent le même arc AB alors :

$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MP}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MP}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On sait que : $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MP}\right)\equiv\pi[2\pi]$

C'est-à-dire : $2\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

D'où : $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Ainsi : $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MP}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc : AMP est un triangle équilatéral.

b) Montrons que : M est l'image du point P par la rotation r

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a : $\begin{cases} AP=AM \\ \left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Donc : M est l'image du point P par la rotation r

2) Déduisons que : $MA+MC=MB$

On a : $MP=MA$ car : AMP est un triangle équilatéral.

On a : $MC=PB$ car $r(P)=M$ et $r(B)=C$

Et les points : M ; P et B sont alignés dans le même sens

D'où : $MP+PB=MB$

Donc : $MA+MC=MB$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien