http://www.xriadiat.com **DS4: L** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(1\text{pt}\times 3)$: Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1$ 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x}-2=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}x^2+3x-10=0$; On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x}-2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(x^2+3x-10\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x+5)}=\frac{2}{14}$$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1$ On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1=\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}+x-1=\lim_{x\to -\infty}|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x-1$$

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1=\lim_{x\to -\infty}-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x-1=\lim_{x\to -\infty}-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1\right)-1=\lim_{x\to -\infty}-x\frac{\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}-1\right)\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}-1=\lim_{x\to -\infty}-x\frac{1-\frac{2}{x}-1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}-1$$

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-2x}+x-1=\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}-1=1-1=0$$

3) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$

On pose $x-\frac{\pi}{6}=h$ donc : $x\to\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to 0$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin h}{h}=2\times 1=2$$

Exercice2 : (7pts) : $(1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+2{,}5\text{pt})$:

Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{ax^2} & ;\ si\quad x\succ 0\\ f(x)=\frac{1+bx-\sqrt{x^2+1}}{x^2+x} & ;\ si\quad x\prec 0\end{cases}$

avec : $a\neq 0$ et $b\in\mathbb{R}$

1) Déterminer : D_f

2) Calculer suivant les valeurs de a : $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$

4) Déterminer a et b sachant que : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

5) Discuter suivant les valeurs de b : $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\succ 0\ et\ 1+x^2\geq 0\ et\, a\,x^2\neq 0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec 0\ et\ x^2+x\neq 0\ et\ x^2+1\geq 0\right\}$

On a : $x^2+x=0\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow x+1=0\ ou\ x=0\Leftrightarrow x=-1\ ou\ x=0$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\succ 0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec 0 et\ x\neq -1\right\}=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

2) Calcul suivant les valeurs de a : $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

$$\forall x\succ 0\ ;\ f(x)=\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{ax^2}=\frac{1-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{ax^2}=\frac{1-|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{ax^2}$$ Or $x\to+\infty$ donc : $|x|=x$

$$f(x)=\frac{1-x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{ax^2}=\frac{x\left(\frac{1}{x}-\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)}{ax^2}=\frac{\frac{1}{x}-\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{ax}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}-\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{ax}=0$

3) Calcul de : $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$

$$\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\ ;\ f(x)=\frac{1+bx-\sqrt{x^2+1}}{x^2+x}=\frac{1+bx-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x(x+1)}=\frac{1+bx-|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x(x+1)}$$

Or $x\to-\infty$ donc : $|x|=-x$; $f(x)=\frac{1+bx+x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x(x+1)}=\frac{x\left(\frac{1}{x}+b+\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)}{x(x+1)}=\frac{\frac{1}{x}+b+\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\frac{1}{x}+b+\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x+1}=0$

4) Détermination de a et b :

$$\forall x\succ 0\ ;\ f(x)=\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{ax^2}=\frac{\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{ax^2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}=\frac{1-1-x^2}{ax^2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}=-\frac{1}{a\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{1}{a\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}=-\frac{1}{2a}$

$$\forall x\prec 0\ ;\ f(x)=\frac{1+bx-\sqrt{x^2+1}}{x^2+x}=\frac{\left((1+bx)-\sqrt{x^2+1}\right)\left((1+bx)+\sqrt{x^2+1}\right)}{x(x+1)\left(1+bx+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{(1+bx)^2-\sqrt{x^2+1}^2}{x(x+1)\left(1+bx+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$f(x)=\frac{1+2bx+b^2x^2-x^2-1}{x(x+1)\left(1+bx+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{x\left(2b+b^2x-x\right)}{x(x+1)\left(1+bx+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2b+b^2x-x}{(x+1)\left(1+bx+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2b+b^2x-x}{(x+1)\left(1+bx+\sqrt{x^2+1}\right)}=b$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$

Donc : $-\frac{1}{2a}=b=1$ c'est-à-dire : $b=1$ et $a=-\frac{1}{2}$

5) Discutons suivant les valeurs de b : $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$

On a : $f(x)=\frac{1+bx-\sqrt{x^2+1}}{x^2+x}$; $si\quad x\prec 0$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{1+bx-\sqrt{x^2+1}}{x^2+x}$$

On a : $\lim\limits_{x\to -1}1+bx-\sqrt{x^2+1}=1-b-\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x\to -1}x^2+x=0$

x	$-\infty$ -1 0 $+\infty$
$x2+x$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

Si $1-b-\sqrt{2}\succ 0$ c'est-à-dire : $b\prec 1-\sqrt{2}$ alors : $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-\infty$

Si $1-b-\sqrt{2}\prec 0$ c'est-à-dire : $b\succ 1-\sqrt{2}$ alors : $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$

Si $1-b-\sqrt{2}=0$ c'est-à-dire : $b=1-\sqrt{2}$

Alors : $f(x)=\frac{1+bx-\sqrt{x^2+1}}{x^2+x}=\frac{1+\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+x}=\frac{x+1-\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}}{x(x+1)}=\frac{x+1}{x(x+1)}-\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+1}}{x(x+1)}$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{x}-\frac{2x^2-x^2-1}{x(x+1)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x^2-1}{x(x+1)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)\left(\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x\left(\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x\left(\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}\right)}=-1+\frac{2}{2\sqrt{2}}=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

Exercice3 : $(5{,}5\text{pts})$: $(1{,}5\text{pt}+2\text{pt}+2\text{pt})$:

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x+\sqrt{x-E(x)}$

1) Déterminer : D_f

2)Etudier et Déterminer (s'il existe) la limite suivante : $\lim\limits_{x\to n}f(x)$ avec : $n\in\mathbb{Z}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x-E(x)\geq 0\right\}=\mathbb{R}-\{0\}$

On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x$ donc : $0\leq x-E(x)$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)

- Calculons : $\lim\limits_{x\to n^+}f(x)$????

$n\prec x\prec n+1\Rightarrow E(x)=n\Rightarrow f(x)=-x+\sqrt{x-n}$

$\lim\limits_{x\to n^+}f(x)=\lim\limits_{x\to n^+}-x+\sqrt{x-n}=-n$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to n^-}f(x)$????

$n-1\prec x\prec n\Rightarrow E(x)=n-1\Rightarrow f(x)=-x+\sqrt{x-n+1}$

$\lim\limits_{x\to n^-}f(x)=\lim\limits_{x\to n^-}-x+\sqrt{x-n+1}=-n+1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to n^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to n^+}f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en n

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow -x+\sqrt{x-E(x)}=0\Leftrightarrow\sqrt{x-E(x)}=x$

On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x\Leftrightarrow 0\leq x-E(x)\prec 1$

$f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x-E(x)}=x\Rightarrow 0\leq x\prec 1\Rightarrow 0\leq x\prec 1\Rightarrow E(x)=0\Rightarrow\sqrt{x}=x\Rightarrow x=x^2$

$\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0\ ou\ x-1=0\Rightarrow x=0\ ou\ x=1$

Inversement : $f(0)=-0+\sqrt{0-E(0)}=0$ et $f(1)=-1+\sqrt{1-E(1)}=-1\neq 0$

Donc : $S=\{0\}$

Exercice4 : $(4{,}5\text{pts})$: $(1\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt})$:

On considère un carré ABCD tel que $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit M un point quelconque de la droite (CD) distinct de C et de D

la droite qui passe par A et perpondiculaire a la droite (AM) en O coupe la droite (BC) en N

On considère la rotation r de centre A et qui transforme D en B

1) Déterminer un angle de la rotation r

2) Déterminer l'image de la droite (DC) par la rotation r

3) Montrer que : $r(M)=N$

4) En déduire la nature du triangle AMN

Solution : 1) Déterminer un angle de la rotation r

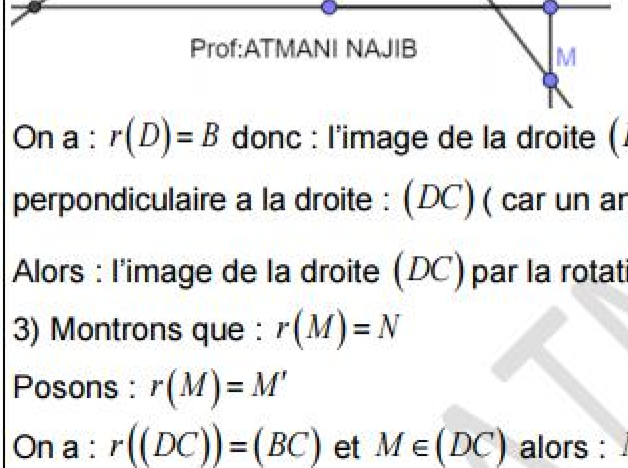
→On a : $r(D)=B$ d'ou : $\begin{cases}AD=AB\\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\alpha[2\pi]\end{cases}$

Et puisque : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On a alors : $\left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $\alpha\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ par suite : un angle de la rotation r est $-\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire : $r\left(A;-\frac{\pi}{2}\right)$

2) Déterminons l'image de la droite (DC) par la rotation r



On a : $r(D)=B$ donc : l'image de la droite (DC) par la rotation r est la droite qui passe $r(D)=B$ et perpondiculaire a la droite : (DC) (car un angle de la rotation r est $-\frac{\pi}{2}$) et comme : $(BC)\perp(DC)$

Alors : l'image de la droite (DC) par la rotation r est la droite (BC)

3) Montrons que : $r(M)=N$

Posons : $r(M)=M'$

On a : $r((DC))=(BC)$ et $M\in(DC)$ alors : $M'\in(BC)$

On a : $r(M)=M'$ alors : $\left(\overline{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Alors : $M'\in(\Delta)$ passant par A et perpondiculaire a la droite : (AM)

Alors : $M'\in(\Delta)\cap(BC)$ C'est-à-dire : $M'=N$

Par suite : $r(M)=N$

4) Déduisons la nature du triangle AMN

On a : $r(M)=N$ donc : $\begin{cases}AM=AN\\ \left(\overline{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : AMN est un triangle isocèle et rectangle en A

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien