1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (2,5pts) : $(2\text{pt}+0,5)$: la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\dfrac{2x+\cos x}{x+1}$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\,|f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ |f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$; $f(x)-2=\dfrac{2x+\cos x}{x+1}-2=\dfrac{2x+\cos x-2x-2}{x+1}=\dfrac{\cos x-2}{x+1}$

Donc : $|f(x)-2|=\dfrac{|\cos x-2|}{|x+1|}=\dfrac{|\cos x-2|}{x+1}$ et on a : $|\cos x+(-2)|\le|\cos x|+|-2|\le1+2\le3$ car $|\cos x|\le1$

Et on a : $x\prec x+1$ donc : $\dfrac{1}{x+1}\prec\dfrac{1}{x}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ |f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$

2) On a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ |f(x)-2|\le\dfrac{3}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

Exercice2 : (2,5pts) :

Calculer et discuter suivant les valeurs de $n\in\mathbb{N}^*$ la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n-3x}{x^2+1}\right)$

Solution : Si : $n=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n-3x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2}{x}\right)=\boxed{0}$

Si : $n=2$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n-3x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right)=\boxed{1}$

Si : $n\succ2$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n-3x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^n}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-2}=\boxed{+\infty}$

Exercice3 : (7pts) : $(1\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt}+1,5\text{pt})$: Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}} & ;\ si\quad x\succ1\\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3} & ;\ si\quad x\prec1\end{cases}$$

1) Déterminer : D_f 2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3) Etudier la limite de f en 1 4) Etudier la limite de f en $-\dfrac{3}{2}$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\succ1\ et\ x\ge0et\ x+3\ge0et\ 2-\sqrt{x+3}\ne0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec1\ et\ 2x^2+x-3\ne0\ et\ 1-x\ge0\right\}$

On a : $2-\sqrt{x+3}=0\Leftrightarrow2=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow4=x+3\Leftrightarrow1=x$

$2x^2+x-3=0$ $\Delta=1+24=25$ donc : $x_1=\dfrac{-1-5}{4}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+5}{4}=\dfrac{4}{4}=1$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\succ1\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}/x\prec1\ et\ x\ne-\dfrac{3}{2}\right\}=\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{3}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

2) Calculer des limites : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}}=\dfrac{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{2-\sqrt{x\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}}=\dfrac{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{x}}}\right)}=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{x}}}}$ Donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{x}}}}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}=\dfrac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}\right)}}{x\left(2x+1-\frac{3}{x}\right)}=\dfrac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x\left(2x+1-\frac{3}{x}\right)}=\dfrac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x\left(2x+1-\frac{3}{x}\right)}$ car : $x\to-\infty$ donc : $|x|=-x$

$f(x)=\dfrac{-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{2x+1-\frac{3}{x}}$ et par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{2x+1-\frac{3}{x}}=0$

3)a) Etude de la limite de f en 1 à droite :

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2+\sqrt{x+3})}{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})(\sqrt{x}+1)}$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)(2+\sqrt{x+3})}{\left(2^2-\sqrt{x+3}^2\right)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{(4-x-3)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{-(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1^+}-\dfrac{2+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}+1}=-2$

b) Etude de la limite de f en 1 à gauche :

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}=\dfrac{\sqrt{1-x}}{2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{1-x}{-2\sqrt{1-x}(1-x)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=-\dfrac{1}{(2x+3)\sqrt{1-x}}$

Donc : $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}-\dfrac{1}{(2x+3)\sqrt{1-x}}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}=0^+$

4) Etude de la limite de f en $-\dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x^2+x-3}=\dfrac{\sqrt{1+\frac{3}{2}}}{2\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}-3}="\dfrac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{0}"$

Etudions le signe de : $2x^2+x-3$ $\Delta=1+24=25$ donc : $x_1=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=1$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+}2x^2+x-3=0^-$ et donc : $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+}f(x)=-\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-}2x^2+x-3=0^+$ et donc : $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-}f(x)=+\infty$

Exercice4 : (3,5pts) : $(1\text{pt}+1,5\text{pt}+1\text{pt})$: Considérons la fonction f définie par :

$f(x)=\dfrac{\cos2x-\cos x}{x\sin2x}$

1) Déterminer : D_f 2) Montrer que : $\forall x\in D_f$; $f(x)=\dfrac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}$

3) En déduire : $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\sin2x\ne0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\ne0\ et\ \sin2x\ne0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\ne0\ et\ 2x\ne k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\ne0\ et\ x\ne k\dfrac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}=\mathbb{R}-\left\{k\dfrac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

2)Soit : $x\in D_f$ on a ; $f(x)=\dfrac{\cos2x-\cos x}{x\sin2x}$

On sait que : *cos p- cos q* = 2sin $\left(\frac{p+q}{2}\right)$. sin $\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc : $f(x)=\dfrac{-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2x\sin x\cos x}=\dfrac{-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2x\cos x2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{2x\cos x\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

3) On a : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x}\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$ car $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin X}{X}=1$

Exercice5 : (4,5pts) : $(2\text{pt}+2,5\text{pt})$:

On considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soient E et F deux points respectivement des segments $[AB]$ et $[BC]$ tel que : $AE=BF$

H est le point d'intersection des droites (CE) et (AF)

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

1) Déterminer les images des points A ; B ; D ; C ; E par la rotation r

2) Montrer que : H est l'orthocentre du triangle DEF

Solution :1) On a : $r(A)=B$; $r(B)=C$; $r(C)=D$ et $r(D)=A$

On pose : $r(E)=E'$

On a : $r([AB])=[BC]$ et puisque : $E\in[AB]$ alors $E'\in[BC]$

et puisque : la rotation r conserve les distance alors : $AE=BE'$ et comme : $AE=BF$

En déduit que : $E'=F$

2) On a : $r(D)=A$ et $r(E)=F$ et l'angle de r est $\dfrac{\pi}{2}$ donc : $\left(\overline{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{FA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

C'est-à-dire : $(EH)\perp(DF)$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien