http://www.xriadiat.com **DS4: O** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (2pts) : $(1{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt})$: Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$

1)Monter que : $\forall x \in D_f \quad \left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right| \le \dfrac{1}{2}|x+1|$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Solution : Soit $x \in [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$; $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+1}-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{|x+1|}{2\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2}$

Et on a $\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2 \ge 1$ donc : $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right| \le \dfrac{1}{2}|x+1|$: $\forall x \in D_f$

2) Puisque : $\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right| \le \dfrac{1}{2}|x+1|$ et $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{2}|x+1| = 0$ Alors : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Exercice2 : (1,5pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x+2} & si\ x \ge 0 \\ f(x) = E(x) & si\ x \prec 0 \end{cases}$

Etudier la limite de f en $x_0 = 0$

Solution : Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\prec 0}} f(x)$?

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{x(x-2)}{x+2} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\prec 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\prec 0}} E(x) = E(0)-1 = 0-1 = -1$

Puisque : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} f(x) \ne \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\prec 0}} f(x)$ alors f n'admet pas de limite au point : $x_0 = 0$

Exercice3 : (5pts) : $(1\text{pt}\times 5)$: Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\prec 0}} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to m \\ x\succ m}} \dfrac{x+1}{x-m}$ avec $m \succ 0$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{x+1}{1-|x^2+x-1|}$ 5) $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}}$: On a :

$$\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1^2-\sqrt{x+1}^2} = \frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{1-x-1} = \frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-x} = -\frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} -\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} -\left(1+\sqrt{x+1}\right) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \sqrt{x} = 0^+$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\prec 0}} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$:

On a : $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}} = \dfrac{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)} = \dfrac{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{x+1-1+x} = \dfrac{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\prec 0}} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\prec 0}} \dfrac{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{2x} = -\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to m \\ x\succ m}} \dfrac{x+1}{x-m}$ avec $m \succ 0$ puisque $x \succ m$ alors : $x-m \succ 0$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to m \\ x\succ m}} \dfrac{x+1}{x-m} = "\dfrac{m+1}{0^+}"$

Et puisque $m \succ 0$ alors : $m+1 \succ 0$ et donc : $\lim\limits_{\substack{x\to m \\ x\succ m}} \dfrac{x+1}{x-m} = +\infty$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{x+1}{1-|x^2+x-1|}$; Déterminons le signe de : x^2+x-1

On a : $\Delta = 1+4 = 5 \succ 0$ donc : $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $x \to 0$ et $x \succ 0$ donc : $x \in \left]0;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$ donc : $x^2+x-1 \le 0$

Par suite : $1-|x^2+x-1| = 1--(x^2+x-1) = 1+x^2+x-1 = x^2+x$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{x+1}{1-|x^2+x-1|} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{x+1}{x^2+x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{x+1}{x(x+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\succ 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2}$: Directement, on obtient une forme indéterminée du type « "$\dfrac{0}{0}$" »

$\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}+1 = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+2x}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}+1$

$\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x(x+2)}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}+1 = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x}}+1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt{x^2+2x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to -2^-} x = -2$ Alors : $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+x+2}{x+2} = -\infty$

Exercice4 : (6pts) : $(0{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+2\text{pt}+2\text{pt})$: Considérons la fonction f_m définie par :

$f_m(x) = mx-\sqrt{x^2+2}$

1) Déterminer : D_{f_m}

2) Calculer suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x)$

3) Calculer suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to -\infty} f_m(x)$

4) Déterminer : suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m}$

Solution : 1) $D_{f_m} = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \ge 0\right\} = \mathbb{R}$

2) Calcul suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} mx-\sqrt{x^2+2} = \lim\limits_{x\to +\infty} mx-\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} mx-|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}$

Or $x \to +\infty$ donc : $|x| = x$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(m-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)$

Si : $1 \prec m$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = +\infty$

Si : $m \prec 1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = -\infty$

Si : $m = 1$; $f_1(x) = x-\sqrt{x^2+2} = x-\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)} = x-x\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)} = x\left(1-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)$

$$f_1(x) = x\frac{\left(1-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)} = x\frac{1-1-\frac{2}{x^2}}{\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)} = \frac{-2}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x) = 0$

3) Calcul suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to -\infty} f_m(x)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} mx-\sqrt{x^2+2} = \lim\limits_{x\to -\infty} mx-\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} mx-|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}$

Or $x \to -\infty$ donc : $|x| = -x$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x\left(m+\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)$

Si : $-1 \prec m$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = -\infty$

Si : $m \prec -1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = +\infty$

Si : $m = -1$; $f_{-1}(x) = -x-\sqrt{x^2+2} = \dfrac{\left(-x-\sqrt{x^2+2}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+2}\right)}{-x+\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{(-x)^2-\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2}{-x+\sqrt{x^2+2}}$

$f_{-1}(x) = \dfrac{x^2-x^2-2}{-x+\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{-2}{-x+\sqrt{x^2+2}}$

Donc : $\lim\limits_{x\to -\infty} f_{-1}(x) = 0$

4) Détermination suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m}$

On a : $\lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m} = "\dfrac{m^2-\sqrt{m^2+2}}{0^+}"$

Etudions le signe de : $m^2-\sqrt{m^2+2}$

$m^2-\sqrt{m^2+2} = \dfrac{\left(m^2-\sqrt{m^2+2}\right)\left(m^2+\sqrt{m^2+2}\right)}{m^2+\sqrt{m^2+2}} = \dfrac{m^4-m^2-2}{m^2+\sqrt{m^2+2}}$

Le signe de : $m^2-\sqrt{m^2+2}$ est celui de : m^4-m^2-2 car $m^2+\sqrt{m^2+2} \succ 0$

Etudions le signe de : m^4-m^2-2

On pose : $m^2 = X$; $m^4-m^2-2 = X^2-X-2$ $\Delta = 9 \succ 0$ donc : $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$

$m^4-m^2-2 = (X-2)(X+1) = (m^2-2)(m^2+1)$ On a : $m^2+1 \succ 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
m^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si : $m \in \left]-\infty;-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ alors : $m^4-m^2-2 \succ 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m} = +\infty$

Si : $m \in \left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[$ alors : $m^4-m^2-2 \prec 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m} = -\infty$

Si : $m = \sqrt{2}$; $\dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m} = \dfrac{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}}{x-\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}$

$$= \frac{2x^2-x^2-2}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)} = \frac{x^2-2}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)} = \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)} = \frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} \dfrac{mx-\sqrt{x^2+2}}{x-m} = \lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} \dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Si : $m = -\sqrt{2}$; $\dfrac{-\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}}{x+\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}}{x+\sqrt{2}} = \dfrac{\left(-\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)}$

$$= \frac{2x^2-x^2-2}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)} = \frac{x^2-2}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)} = \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}\right)} = \frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}^+} \dfrac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+2}} = = \dfrac{-2\sqrt{2}}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice5 : (5,5pts) : $(1{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt})$ On considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit I le milieu du segment $[AB]$ et M un point de la droite (BC) tel que : $\overrightarrow{CM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et que la droite perpondiculaire a la droite (OM) en O coupe la droite (AB) en N

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

1)a) Déterminer les images des droites (OM) et (BC) par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

b) Montrer que : $r(M) = N$

2) Vérifier que : $\overrightarrow{BN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{NO},\overrightarrow{NC}\right)[2\pi]$

3) Montrer que : $AM = ON$ et en déduire la nature du triangle AMO

Solution : 1) a) Déterminons les images des droites (OM) et (BC) par la rotation : $r\left(O;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

→On a : $\begin{cases} OB = OA \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ d'ou : $r(B) = A$

→On a : $\begin{cases} OC = OB \\ \left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ d'ou : $r(C) = B$

Donc : l'image de la droite (BC) par la rotation : $r\left(O;\dfrac{\pi}{2}\right)$ est la droite (AB)

→On a : $r(O) = O$ car O le centre de la rotation r

L'image de la droite (OM) par la rotation : $r\left(O;\dfrac{\pi}{2}\right)$ est la droite passant par O et perpendiculaire a (OM) et c'est (ON)

Donc : l'image de la droite (OM) par la rotation : $r\left(O;\dfrac{\pi}{2}\right)$ est la droite (ON)

b) Montrons que : $r(M) = N$

Soit M le point d'intersection de (BC) et (OM)

On a : l'image de la droite (OM) par la rotation : $r\left(O;\dfrac{\pi}{2}\right)$ est la droite (ON)

Er l'image de la droite (BC) par la rotation : $r\left(O;\dfrac{\pi}{2}\right)$ est la droite (AB)

D'où $r(M)$ le point d'intersection de (ON) et (AB) qui n'est autre que N

Par suite : $r(M) = N$

2) Vérifions que : $\overrightarrow{BN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{NO},\overrightarrow{NC}\right)[2\pi]$

→On a : $r(B) = A$ et $r(M) = N$ et $r(C) = B$ et $\overrightarrow{CM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CB}$

Donc : $\overrightarrow{BN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

→On a : $r(O) = O$ et $r(M) = N$ et $r(D) = C$

Donc : $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{NO},\overrightarrow{NC}\right)[2\pi]$ car la rotation conserve la mesure des angles orientés

3) Montrons que : $AM = ON$ et en déduire la nature du triangle AMO

→Calculons : AM

On considère le triangle ABM rectangle en B

D'où : par application de Pythagore on a : $AM^2 = AB^2+BM^2$

$AM^2 = AB^2+\left(\dfrac{1}{2}BC\right)^2$; $(AB = BC)$

$AM^2 = AB^2+\dfrac{1}{4}AB^2 = \dfrac{5}{4}AB^2$

D'où : $AM = \dfrac{\sqrt{5}}{2}AB$ ❶

→Calculons : ON

On considère le triangle BMN rectangle en B

D'où : par application de Pythagore on a : $MN^2 = MB^2+BN^2$

$MN^2 = \left(\dfrac{1}{2}BC\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}AB\right)^2 \Leftrightarrow MN^2 = \dfrac{1}{4}AB^2+\dfrac{9}{4}AB^2 = \dfrac{5}{2}AB^2$

On considère le triangle OMN rectangle en O

D'où : par application de Pythagore on a : $ON^2+OM^2 = MN^2$ et $OM = ON$

D'où : $2OM^2 = MN^2$ c'est-à-dire : $ON^2 = \dfrac{1}{2}MN^2 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}AB^2 = \dfrac{5}{4}AB^2$

Donc : $ON = \dfrac{\sqrt{5}}{2}AB$ ❷

De ❶et❷: en déduit que : $AM = ON$

Donc : AMO est un triangle isocèle en M

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien