http://www.xriadiat.com DS4: P PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (3pts) : $(0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1{,}5\text{pt})$:

Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2-|x^2-4x|+3}{x^2+x}$

1) Déterminer : D_f

2) Ecrire l'expression de f(x) sans valeur absolue

3) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de f

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2+x\neq 0\}$

$x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-1$

$D_f=\mathbb{R}-\{-1;0\}=]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$

2) L'expression de f(x) sans valeur absolue :

$x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x-4=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

C'est-à-dire : $|x^2-4x|=x^2-4x \Leftrightarrow x\in]-\infty;0]\cup[4;+\infty[$ et $|x^2-4x|=-(x^2-4x) \Leftrightarrow x\in[0;4]$

Par conséquent :

Si : $x\in]-\infty;0[\cup[4;+\infty[-\{-1\}$: $f(x)=\dfrac{2x^2-x^2+4x+3}{x^2+x}=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x}=\dfrac{(x+3)(x+1)}{x(x+1)}=\dfrac{x+3}{x}$

Si : $x\in]0;4]$: $f(x)=\dfrac{2x^2+x^2-4x+3}{x^2+x}=\dfrac{3x^2-4x+3}{x^2+x}$

3) Déterminons les limites de f aux bornes du domaine de f :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+3}{x}=-2$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3x^2-4x+3}{x(x+1)}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x(x+1)=0^+$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x+3}{x}=-\infty$

Exercice2 : $(1{,}5\text{pts})$: Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}}$

Solution : Soit : $x\in\mathbb{R}^{*+}$: $\dfrac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{3\sin x}{\sqrt{x}}=1+3\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

Donc : $\dfrac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}}-1=3\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

Donc : $\left|\dfrac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}}-1\right|=\left|3\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|=\left|\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right||\sin x|\leq\left|\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right|$

Donc : $\left|\dfrac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}}-1\right|\leq\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$ car $|\sin x|\leq 1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x}}=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3\sin x}{\sqrt{x}}=1$

Exercice3 : $(1{,}5\text{pts})$: Soit la fonction g définie par : $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto g(x)=\begin{cases}2x^2-x+3 & si\ x\geq1\\ -x^2+x+\alpha & si\ x\succ0\end{cases}\end{array}$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

Solution : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}}2x^2-x+3=4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}}-x^2+x+\alpha=\alpha$

g admet une limite en 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)\Leftrightarrow\alpha=4\Leftrightarrow\alpha=4$

Exercice4 : (3pts) : Calculer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

Solution : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{x^2}$

Si : $n=1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\boxed{0}$

Si : $n=2$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\boxed{1}$

Si : $n\succ2$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-2}=\boxed{+\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2}$

Si : $n=1$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\boxed{0}$

Si : $n=2$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\boxed{1}$

Si : $n\succ2$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^{n-2}$

- ✓ **Si :** n est pair alors : $n-2$ est pair donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}=+\infty$
- ✓ **Si :** n est impair alors : $n-2$ est impair donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^n}{x^2+x+1}=-\infty$

Exercice5 : (7pts) : $(0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$;

Considérons la fonction f définie par : $f(x)=xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

1) Déterminer : D_f

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$ b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) a) Montrer que : $f(x)=x$ si $x\in\left]\dfrac{1}{4};1\right]$

b) Etudier la limite de f en 1

4) a) Montrer que : $\sqrt{x}-x\leq f(x)\leq\sqrt{x}$; $\forall x\in]0;1[$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

6) Soit $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

a) Montrer que : $f(x)=(k-1)x$; $\forall x\in\left]\dfrac{1}{k^2};\dfrac{1}{(k-1)^2}\right[$

b) Montrer que : $f(x)=kx$; $\forall x\in\left]\dfrac{1}{(k+1)^2};\dfrac{1}{k^2}\right[$

c) Etudier la limite de f en $\dfrac{1}{k^2}$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\succ0\}=\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$

2) a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x)=0$

Soit $x\in]0;+\infty[$

$f(x)=0\Leftrightarrow xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\Leftrightarrow 0\prec\dfrac{1}{\sqrt{x}}\prec1\Leftrightarrow\sqrt{x}\succ1\Leftrightarrow x\succ1$

$f(x)=0\Leftrightarrow x\in]1;+\infty[$

D'où : $S=]0;+\infty[$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\forall x\in]1;+\infty[$; $f(x)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$

3) a) Montrons que : $f(x)=x$ si $x\in\left]\dfrac{1}{4};1\right]$

Soit $x\in\left]\dfrac{1}{4};1\right]$ donc : $\dfrac{1}{4}\prec x\leq1\Rightarrow\dfrac{1}{2}\prec\sqrt{x}\leq1\Rightarrow1\leq\dfrac{1}{\sqrt{x}}\prec2\Rightarrow E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$

Donc : $f(x)=xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=x\times1=x$

b) Etudions la limite de f en 1

La limite de f à droite en 1 :

On a : $\forall x\in]0;+\infty[$; $f(x)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}0=0$

La limite de f à gauche en 1 :

On a : $f(x)=x$ si $x\in\left]\dfrac{1}{4};1\right]$ donc : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 1

4) a) Montrons que : $\sqrt{x}-x\leq f(x)\leq\sqrt{x}$; $\forall x\in]0;1[$

Soit $x\in]0;+\infty[$

On a : $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq\dfrac{1}{\sqrt{x}}\prec E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)+1$ donc : $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\prec E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Par suite : $x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\prec xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq x\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ c'est-à-dire : $\sqrt{x}-x\prec xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq\sqrt{x}$

b) Déduction de : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}-x=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$

6) Soit $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

a) Montrons que : $f(x)=(k-1)x$; $\forall x\in\left]\dfrac{1}{k^2};\dfrac{1}{(k-1)^2}\right[$

Soit $x\in\left]\dfrac{1}{k^2};\dfrac{1}{(k-1)^2}\right[$ donc : $\dfrac{1}{k^2}\prec x\prec\dfrac{1}{(k-1)^2}\Rightarrow\dfrac{1}{k}\prec\sqrt{x}\prec\dfrac{1}{(k-1)}\Rightarrow k-1\prec\dfrac{1}{\sqrt{x}}\prec k$

Par suite : $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=k-1$ et alors : $f(x)=xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=x(k-1)$

b) Montrons que : $f(x)=kx$; $\forall x\in\left]\dfrac{1}{(k+1)^2};\dfrac{1}{k^2}\right[$

Soit $x\in\left]\dfrac{1}{(k+1)^2};\dfrac{1}{k^2}\right[$ donc : $\dfrac{1}{(k+1)^2}\prec x\prec\dfrac{1}{k^2}\Rightarrow\dfrac{1}{k+1}\prec\sqrt{x}\prec\dfrac{1}{k}\Rightarrow k\prec\dfrac{1}{\sqrt{x}}\prec k+1$

Par suite : $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=k$ et alors : $f(x)=xE\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=kx$

c) Etude de la limite de f en $\dfrac{1}{k^2}$:

La limite de f à droite en $\dfrac{1}{k^2}$:

On a : $\forall x\in\left]\dfrac{1}{k^2};\dfrac{1}{(k-1)^2}\right[$; $f(x)=(k-1)x$ donc : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k^2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{k^2}^+}(k-1)x=\dfrac{k-1}{k^2}$

La limite de f à gauche en $\dfrac{1}{k^2}$:

On a : $f(x)=kx$; $\forall x\in\left]\dfrac{1}{(k+1)^2};\dfrac{1}{k^2}\right[$ donc : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k^2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{k^2}^-}kx=\dfrac{k}{k^2}=\dfrac{1}{k}$

Soit $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$; $\dfrac{1}{k}=\dfrac{k-1}{k^2}\Leftrightarrow1=\dfrac{k-1}{k}\Leftrightarrow k=k-1\Leftrightarrow0=-1$

Donc : $\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$; $\dfrac{1}{k}\neq\dfrac{k-1}{k^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k^2}^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to\frac{1}{k^2}^+} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en $\dfrac{1}{k^2}$ $\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Exercice6: (4pts) : $(2{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$

On construit IAB est un triangle isocèle et rectangle en I .

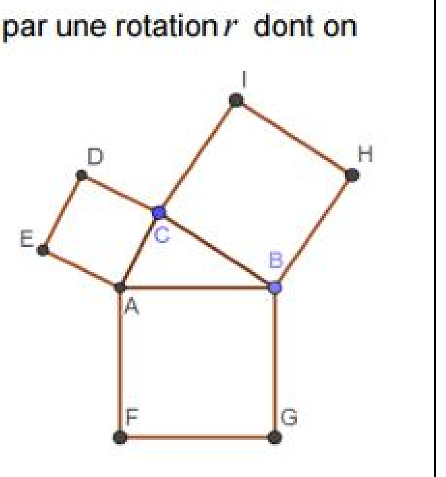
On construit à l'extérieur d'un triangle ABC tel que : $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ positif trois carrés :

ACDE ; BAFG et CBHI

1) Montrer que le triangle DCB est l'image du triangle ACI par une rotation r dont on déterminera le centre et l'angle

2) Montrer que les droites : (AH) et (CG) sont perpendiculaires

Solution : 1) Montrons que le triangle DCB est l'image du triangle ACI par une rotation r dont on déterminera le centre et l'angle



Soit r_1 la rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

→On a : ACDE est un carré d'où : $\begin{cases}CA=CD\\ (\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}})\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $r_1(A)=D$

→On a : BCIH est un carré d'où : $\begin{cases}CI=CB\\ (\overline{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CB}})\equiv-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc : $r_1(I)=B$

→On a : $r_1(C)=C$ car C le centre de r_1

Donc : le triangle DCB est l'image du triangle ACI par une rotation r de centre C et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

2) Montrons que les droites : (AH) et (CG) sont perpendiculaires

Soit r_2 la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

→On a : ABGF est un carré d'où : $\begin{cases}BA=BG\\ (\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BG}})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ et donc : $r_2(A)=G$

→On a : BCIH est un carré d'où : $\begin{cases}BH=BC\\ (\overline{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BC}})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ et donc : $r_2(H)=C$

Ainsi : $AH=CG$ et $(\overline{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{GC}})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : les droites : (AH) et (CG) sont perpendiculaire

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien