http://www.xriadiat.com **DS4: Q** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (5,5pts) : $(1pt+1pt+0,5pt+0,5pt+0,5pt+1pt+1pt)$:

Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x-|2x-\sqrt{x}|}$

1) Déterminer : D_f 2) Ecrire $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue :

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

5) Etudier la limite de f en 1

6) Etudier la limite de f en $\frac{1}{4}$

7) Etudier la limite de f en $\frac{1}{9}$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\geq0 \text{ et } x-|2x-\sqrt{x}|\neq0\right\}$

On a : $\begin{cases}x\geq0\\ x-|2x-\sqrt{x}|=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq0\\ x=|2x-\sqrt{x}|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq0\\ 2x-\sqrt{x}=x \text{ ou } 2x-\sqrt{x}=-x\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq0\\ x-\sqrt{x}=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x\geq0\\ 3x-\sqrt{x}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq0\\ \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x\geq0\\ \sqrt{x}(3\sqrt{x}-1)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=1) \text{ ou } \left(x=0 \text{ ou } x=\frac{1}{9}\right)$

Donc : $D_f=\left]0;\frac{1}{9}\right[\cup\left]\frac{1}{9};1\right[\cup]1;+\infty[$

2) Ecriture de $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue :

$2x-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=0 \text{ ou } 2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{1}{4}$

x		$\frac{1}{4}$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	0 +	+
$2\sqrt{x}-1$	− 0	+
$2x-\sqrt{x}$	−	+
$\lvert 2x-\sqrt{x}\rvert$	$-2x+\sqrt{x}$	$2x-\sqrt{x}$

Donc : $\begin{cases}f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-x} & ; \text{si } x\geq\frac{1}{4}\\ f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3x-\sqrt{x}} & ; \text{si } x\leq\frac{1}{4}\end{cases}$

3) Calcul de : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}+1}{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}=-1$$

4) Calcul de : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}(3\sqrt{x}-1)}=-\infty$$

5) Etude de la limite de f en 1

$\forall x\in\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$; $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-x}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=0$

6) Etude de la limite de f en $\frac{1}{4}$

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^+}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-x}=1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^-}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3x-\sqrt{x}}=1$

Par suite : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} f(x)=1$

7) Etude de la limite de f en $\frac{1}{9}$

On a : $\forall x\in\left]0;\frac{1}{4}\right[-\left\{\frac{1}{9}\right\}$; $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3x-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}(3\sqrt{x}-1)}$ et on a :

x	0 $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{4}$
$3\sqrt{x}-1$	− 0 +

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{9}^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{9}^-} f(x)=-\infty$

Exercice2 : (4,5pts) : $(0,75pt\times6)$: Calculer et étudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

Solution : 1) On pose : $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1\prec x\prec1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x\succ-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x\succ-1}}-\frac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x\prec-1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\frac{x+1}{x-1}$ donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}}\frac{x+1}{x-1}=0$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x\succ-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x\prec-1}} f(x)=0$: par suite $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$

2) $\frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}=\frac{x(x-1)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\frac{x(x-1)(1+\sqrt{x})}{-(x-1)}=-x(1+\sqrt{x})$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1}-x(1+\sqrt{x})=-1$

3) $\forall x\in\mathbb{R}^*$: on a $x-1\prec E(x)\leq x$ donc : $1-\frac{1}{x}\leq\frac{E(x)}{x}\leq1$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}1=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=1$ (d'après gendarmes)

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}$; $\frac{x\tan x}{1-\cos x}=\frac{x\frac{\tan x}{x}\times x}{\frac{1-\cos x}{x^2}\times x^2}=\frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ alors : $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$? on pose : $f(x)=\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$: $-1\leq\cos x\leq1$ et $-1\leq\sin x\leq1$ donc : $0\leq\frac{1+\sin x}{2+\cos x}\leq2$ et par suite : $0\leq f(x)\leq\frac{2}{x^2}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}$? $\lim\limits_{x\to1}x^3-1=0$ et $\lim\limits_{x\to1}x^2+x-2=0$

On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a : $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ et $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+2}=\frac{3}{3}=1$

Exercice3 : (2,5pts) : Calculer suivant les valeurs du paramètre réel m la limite suivante :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx+1$

Solution : On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}-mx+1=+\infty \text{ ou } 1 \text{ ou } -\infty$ Suivant le réel m

$\to$Si : $m=0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}+1=+\infty$

$\to$Si : $m\prec0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}-mx+1=\lim\limits_{x\to+\infty}-mx=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx+1=+\infty$

$\to$Si : $m\succ0$:

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-mx+1=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-mx+1$

Or : $|x|=x$ car $x\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx+1=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-m\right)+1$ **On a :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{2}$

- ✓ Si : $0\prec m\prec\sqrt{2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-m=\sqrt{2}-m\succ0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx+1=+\infty$

- ✓ Si : $m\succ\sqrt{2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-m=\sqrt{2}-m\prec0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx+1=-\infty$

- ✓ Si : $m=\sqrt{2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{2}x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{2}x)}{\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{2}x}+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{2}x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+1-2x^2}{\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{2}x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}x}+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{2}x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}x}+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2}}+1=-\frac{1}{2\sqrt{2}}+1$

Conclusion :

$\to$Si : $m\prec\sqrt{2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx+1=+\infty$

$\to$Si : $m=\sqrt{2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx+1=-\frac{1}{2\sqrt{2}}+1$

$\to$Si : $m\succ\sqrt{2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-mx+1=-\infty$

Exercice4 : (3,5pts) : $(0,5pt+1,5pt+1,5pt)$;

Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x\times\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1}$

1) Déterminer : D_f 2) Etudier la limite de f en 0

3) Etudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq0\}=\mathbb{R}-\{0\}$

2) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\times\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1}$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$????

Soit $x\in]0;+\infty[$; On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x \Rightarrow\frac{1}{x}-1\prec E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{x}\prec E\left(\frac{1}{x}\right)+1\leq\frac{1}{x}+1$

$\Rightarrow\frac{1}{x^2}\prec\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\leq\left(\frac{1}{x}+1\right)^2\Rightarrow\frac{1}{x^2}+1\prec\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1\leq\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1$

$\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\prec\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1}\leq\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}\Rightarrow x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\prec x\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1}\leq x\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}$

$\Rightarrow\sqrt{1+x^2}\prec f(x)\leq x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}+1\right)+1}\Rightarrow\sqrt{1+x^2}\prec f(x)\leq\sqrt{1+2x+2x^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{1+x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{1+2x+2x^2}=1$ alors : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$????

Soit $x\in]-1;0[$; donc : $-1\prec x\prec0$ et donc : $\frac{1}{x}\prec-1\Rightarrow\frac{1}{x}+1\prec0$

On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x$ donc: $\frac{1}{x}-1\prec E\left(\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{x}\prec E\left(\frac{1}{x}\right)+1\leq\frac{1}{x}+1\prec0$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+1\right)^2\leq\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\prec\frac{1}{x^2}\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1\leq\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1\leq\frac{1}{x^2}+1$

$\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}\leq\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1}\leq\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\Rightarrow x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\prec x\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1}\leq x\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}$

$\Rightarrow-\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\prec x\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1}\leq-\sqrt{x^2}\sqrt{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+1}$

$\Rightarrow-\sqrt{1+x^2}\prec f(x)\leq-x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}+1\right)+1}\Rightarrow-\sqrt{1+x^2}\prec f(x)\leq-\sqrt{1+2x+2x^2}$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0^-}-\sqrt{1+x^2}=-1$ et $\lim\limits_{x\to0^-}-\sqrt{1+2x+2x^2}=-1$ alors : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-1$

Puisque : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en 0

2) On doit faire une simplification de : $f(x)$

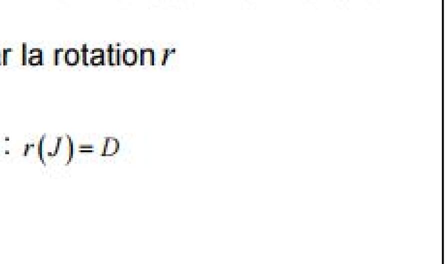
Soit $x\succ1\Rightarrow0\prec\frac{1}{x}\prec1\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow f(x)=x\times\sqrt{\left(1+E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2+1}=x\times\sqrt{1+1}=\sqrt{2}x$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2}x=+\infty$

Soit $x\prec-1\Rightarrow-1\prec\frac{1}{x}\prec0\Rightarrow E\left(\frac{1}{x}\right)=-1\Rightarrow f(x)=x\times\sqrt{(1-1)^2+1}=x$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

Exercice5 : (4pts) : $(2,5pt+1,5pt)$ ABCD est un rectangle dont la longueur est le double de la largeur tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.



Soient I ; J les milieux respectifs des segments : $[AD]$ et $[BC]$

On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer et construire l'image de la droite (AJ) par la rotation r

2) Montrer que le triangle AJD est rectangle en J

Solution :1) Déterminons et construisons l'image de la droite (AJ) par la rotation r

On a : $\begin{cases}IA=IJ\\ \left(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IJ}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : $r(A)=J$ On a : $\begin{cases}IJ=ID\\ \left(\overline{\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{ID}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : $r(J)=D$

Donc : l'image de la droite (AJ) par la rotation r est la droite (JD)

2) Montrons que le triangle AJD est rectangle en J

Comme : $\frac{\pi}{2}$ est l'angle de la rotation r et $r(A)=J$ et $r(J)=D$

Alors : $\left(\overline{\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{JD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : les droites (AJ) et (JD) sont perpendiculaires

Par suite : le triangle AJD est rectangle en J

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien