http://www.xriadiat.com **DS4: R** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : $(1{,}75\text{pts})$ $(1\text{pt}+0{,}75\text{pt})$: Soit la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{2x+1}$

1) Monter que : $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[\ ;\ |f(x)-3|\le\frac{2}{3}|x-4|$

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{2x+1}$

Solution :1) $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[\ ;|f(x)-3|=\left|\sqrt{2x+1}-3\right|=\frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$

Et on a $\sqrt{2x+1}+3\ge 3$ donc : $|f(x)-3|\le\frac{2}{3}|x-4|$

Exercice2 : (3pts) : $(0{,}5pt\times 6)$:

Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x-1+\frac{2}{x} & ; si\quad x\succ 0\\ f(x)=\frac{x^2+3x}{x+1} & ; si\quad x\le 0\end{cases}$

Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

Solution : a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-1+\frac{2}{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+3x}{x+1}$: puisque : $\lim\limits_{x\to 0^-}x^2+3x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}x+1=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x-1+\frac{2}{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{x}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-1+\frac{2}{x}-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x+1}\times\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

Exercice3 : $(2{,}5\text{pts})$ $(0{,}5\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$: Considérons la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{1+3x}-2}{x-\sqrt{x}} & ; si\quad x\ne 1\\ f(1)=a\end{cases}$

1) Déterminer : D_f

2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

3) Déterminer a sachant que : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=a$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/1+3x\ge 0\ et\ x\ge 0 et\ x-\sqrt{x}\ne 0\right\}$

On a : $x-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\ ou\ \sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow x=0\ ou\ \ x=1$

Donc : $D_f=]0;+\infty[$

2) Calcul des limites suivante :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+3x}-2}{x-\sqrt{x}}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+3x}-2}{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x\left(\frac{1}{x}+3\right)}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{x}+3x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+3x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+3x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+3x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}-1=0-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+3x}-2=-1$

3) Détermination de a sachant que : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=a$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+3x}-2}{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+3x}+2\right)\left(\sqrt{1+3x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+3x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(1+3x-4)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+3x}+2\right)\left(x^2-x\right)}$$

$$=\frac{(3x-3)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+3x}+2\right)(x-1)}=\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+3x}+2\right)}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+3x}+2\right)}=\boxed{\frac{3}{2}=a}$

Exercice4 : $(5{,}25\text{pts})$: $(0{,}75pt\times 7)$: Calculer et étudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2(x)}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{25x^2-2}+5x$ 5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}$

7) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}$: On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\frac{\sin 3x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}=\frac{\frac{\sin 3x-\sin x}{x}}{\frac{\sin 2x+\sin x}{x}}=\frac{\frac{\sin 3x}{x}-\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin x}{x}}$ et puisque : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$ avec : $a\in\mathbb{R}^*$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}-\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{3-1}{2+1}=\boxed{\frac{2}{3}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\times\frac{(3x)^2}{\sin^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right)\times\left(\frac{(3x)}{\sin(x)}\right)^2$

Rappel : $\lim\limits_{X\to 0}\frac{1-\cos X}{X^2}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$ avec : $a\in\mathbb{R}^*$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(3x)}{\sin(x)}\right)^2=3^2=9$ calculons : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right)$

On pose : $X=3x$: $x\mapsto 0\Leftrightarrow X\mapsto 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right)=\lim\limits_{X\to 0}\left(\frac{1-\cos X}{X^2}\right)=\frac{1}{2}$

Alors : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin^2(x)}=\frac{1}{2}\times 9=\boxed{\frac{9}{2}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ On pose $\frac{1}{x}=h$ donc : $x\to+\infty\Leftrightarrow h\to 0$ et $\frac{1}{x}=h\Leftrightarrow x=\frac{1}{h}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}+1\right)\tan(h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\tan(h)}{h}+\tan(h)=1+\tan(0)=1+0=1$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{25x^2-2}+5x$: on utilise la technique de la multiplication par l expression conjuguée

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{25x^2-2}+5x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{25x^2-2}+5x\right)\left(\sqrt{25x^2-2}-5x\right)}{\sqrt{25x^2-2}-5x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{25x^2-2-25x^2}{\sqrt{25x^2-2}-5x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{25x^2-2}-5x}$

Comme : $\lim\limits_{x\to-\infty}25x^2-2=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{25x^2-2}=+\infty$ et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}-5x=+\infty$

Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{25x^2-2}-5x=\boxed{+\infty}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{25x^2-2}+5x=\boxed{0}$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}$

Directement, on obtient une forme indéterminée du type « "$\frac{0}{0}$" », il suffit de

Factoriser par (x - 3) au numérateur et au dénominateur puis simplifier :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(x-1-\sqrt{x+1}\right)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-3x\right)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(x^2-2x+1-x-1\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-3x\right)\left(x-1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(x^2-3x\right)}$$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to 3}x-1+\sqrt{x+1}=4$

6) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}$: Directement, on obtient une forme indéterminée du type « "$\frac{0}{0}$" »

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1}+\frac{2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1}+2=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}+2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}+2=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}+2$$

Puisque : $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-x}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}x=1$ Alors : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x-2}{x-1}=+\infty$

7) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)$

m	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$x2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2-3x\succ 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$

$x^2-3x\prec 0\Leftrightarrow x\in]0;3[$

$x-1\succ 0\Leftrightarrow x\in]1;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(x-1)}{(x^2-3x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2-3x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x|x-1|}{|x^2-3x|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x(-(x-1))}{(x^2-3x)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2+x}{x^2-3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{x^2}\right)=\boxed{-1}$$

Exercice5 : $(1{,}5\text{pts})$: $(0{,}75\text{pt}\times 2)$

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ avec : $n\in\mathbb{N}^*$

Etudier et Déterminer (s'il existe) les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to n}f(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to n+1}f(x)$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to n}f(x)$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to n^+}f(x)$????

$$n\prec x\prec n+1\Rightarrow 1\prec\frac{x}{n}\Rightarrow 1\prec\sqrt{\frac{x}{n}}\prec\sqrt{\frac{n+1}{n}}\Rightarrow 1\prec\sqrt{\frac{x}{n}}\prec\sqrt{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow 1\le E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\prec E\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$\lim\limits_{x\to n^+}f(x)=1$ Car on a : $\lim\limits_{x\to n^+}E\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=1$

- Calculons : $\lim\limits_{x\to n^-}f(x)$????

$0\le x\prec n\Rightarrow 0\le\frac{x}{n}\prec 1\Rightarrow 0\le\sqrt{\frac{x}{n}}\prec 1\Rightarrow f(x)=E\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to n^-}f(x)=\lim\limits_{x\to n^-}0=0$

Puisque : $\lim\limits_{x\to n^-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to n^+}f(x)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en n

Même démarche pour : 2) $\lim\limits_{x\to n+1}f(x)$

Exercice6 : (6pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+0{,}5\text{pt}+1{,}5\text{pt})$ ABC est un triangle tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ positif.

On considère les points E et D à l'extérieur du triangle ABC tels que : ACE et ABD sont deux triangles équilatéraux

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Construire une figure

2) Déterminer : $r(C)$ et $r(D)$

3) Montrer que : $CD=BE$

4) On considère le point I le milieu du segment $[CD]$

Déterminer (Γ') l'image du cercle (Γ) de centre C et de rayon CI par la rotation r

5) Soit la droite (Δ') l'image de la droite (AI) par la rotation r

a) Construire la droite (Δ')

b) Montrer que : la droite (Δ') coupe nécessairement le cercle (Γ') ; justifier

Solution :1) Voir figure

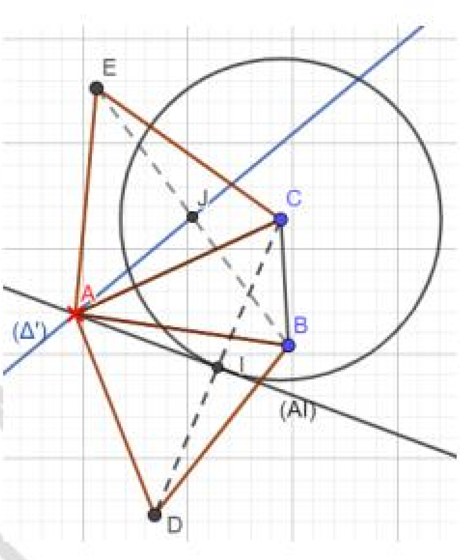
2) Déterminons : $r(C)$ et $r(D)$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

→On a : ACE est un triangle équilatéral direct donc : $\begin{cases} AC=AE\\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ Donc : $r(C)=E$

→On a : ADB est un triangle équilatéral direct donc :

$\begin{cases} AD=AB\\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ Donc : $r(D)=B$



2) Montrons que : $CD=BE$

On a : $r(C)=E$ et $r(D)=B$ et comme la rotation conserve les distances

Alors : $CD=BE$

4) Déterminons (Γ') l'image du cercle (Γ) de centre C et de rayon CI par la rotation r

On a : I le milieu du segment $[CD]$ et (Γ) est le cercle de centre C et de rayon CI et $r(C)=E$

Alors : (Γ') est le cercle de centre E et de rayon CI

5) Soit la droite (Δ') l'image de la droite (AI) par la rotation r

a) Construire la droite (Δ') : I est le milieu du segment $[CD]$ et $r(C)=E$ et $r(D)=B$

Donc : $r(I)$ est le milieu du segment $[EB]$ et comme : $r(A)=A$

Alors : (Δ') passe par A et le milieu du segment $[EB]$

Voir figure

b) Montrons que : la droite (Δ') coupe nécessairement le cercle (Γ')

On a : I le milieu du segment $[CD]$ et c'est le point d'intersection de (CD) et (Γ)

Et comme : $r(C)=E$ et $r(D)=B$ et $r((\Gamma))=(\Gamma')$

$r(I)$ c'est le point d'intersection de (EB) et (Γ')

Donc : la droite (Δ') coupe nécessairement le cercle (Γ') au point $r(I)$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien