http://www.xriadiat.com **DS4: S** PROF: ATMANI NAJIB

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction : Devoir surveiller n°4 sur les leçons suivantes :

LIMITE D'UNE FONCTION et LA ROTATION DANS LE PLAN

Durée :2 heures

Exercice1 : (1,5pts) : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{2x^2-3}{x^2+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

Solution Montrons que : $\forall\varepsilon\succ 0\ \exists B\succ 0\ (\forall x\in D_f)\ x\prec -B \Rightarrow |f(x)-2|\prec\varepsilon$?

Soit $\varepsilon\succ 0$ et soit $x\in\left]-\infty;0\right[$ on cherche $B\succ 0$ tel que : $x\prec -B\Rightarrow |f(x)-2|\prec\varepsilon$

On a : $|f(x)-2|=\left|\frac{2x^2-3}{x^2+1}-2\right|=\left|\frac{-5}{x^2+1}\right|=\frac{5}{x^2+1}\le\frac{5}{x^2}$

Donc : $\forall x\in\left]-\infty;0\right[\ ;\ |f(x)-2|\le\frac{5}{x^2}$

Donc : Pour avoir $|f(x)-2|\prec\varepsilon$ Il suffit d'avoir : $\frac{5}{x^2}\prec\varepsilon$ c'est à dire : $x^2\succ\frac{5}{\varepsilon}$ c'est à dire : $x\prec-\sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}$

Par suite : Il suffit de prendre $B=\sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}$ et on a bien : $B=\sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}\succ 0$

Donc : $\forall\varepsilon\succ 0\ \exists B\succ 0\ (B=\sqrt{\frac{5}{\varepsilon}})\ (\forall x\in D_f)\ x\prec -B\Rightarrow |f(x)-2|\prec\varepsilon$

Donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

Exercice2 : (1,5pts) $(0,5\text{pt}+1\text{pt})$:

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{x}$

2) En déduire les limites suivantes : a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$ b) $\lim_{x\to+\infty} x+\sin x$

Solution : 1) Montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{x}$

Soit : $x\in\mathbb{R}_+^*$; On a : $|\sin x|\le 1$ donc : $\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\frac{|\sin x|}{|x|}\le\frac{1}{x}$

2) a) On a : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ alors : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

b) $\lim_{x\to+\infty} x+\sin x=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=+\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

Exercice3 : (2,75pts) : $(0,75pt+0,75pt+1pt+0,25pt)$: Considérons la fonction f définie par :

$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$

1) Déterminer : D_f

2) Calculer les limites suivantes : a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to1} f(x)$ c) $\lim_{x\to0^+} f(x)$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\ge0\ et\ x-1\ne0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\ge0\ et\ x\ne1\}=[0;1[\cup]1;+\infty[$

2)a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$ On trouve une forme indéterminée : "$\frac{+\infty}{+\infty}$"

$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}=\frac{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$ car : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

b) $\lim_{x\to1} f(x)$? On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

On a: $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}=\frac{\sqrt{x}^2+\sqrt{x}-2}{x-1}$

On va factoriser : $\sqrt{x}^2+\sqrt{x}-2$ on pose : $X=\sqrt{x}$ X^2+X-2 $\Delta=9$

Donc : $X=1$ et $X=-2$ par suite : $X^2+X-2=(X-1)(X+2)$

Par suite : $\sqrt{x}^2+\sqrt{x}-2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$

Donc : $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}^2-1^2}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

Donc : $\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}$

c) $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}=2$

Exercice4 : (5,25pts) : $(0,75pt\times7)$ Calculer et étudier les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to1}(x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}$ 3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3$ 5) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4}\right)$ 6) $\lim_{x\to0}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}$

7) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$

Solution : 1) $\lim_{x\to1}(x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ On pose $x-1=X$ Alors : $x=X+1$

$x\to1\Leftrightarrow X\to0$ et on a : $x^2+x-2=(x-1)(x+2)=X(X+3)$ et

$\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}X\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}X\right)}$

$\lim_{x\to1}(x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{X\to0}-(X+3)\frac{X}{\tan\left(\frac{\pi}{2}X\right)}=\boxed{-\frac{6}{\pi}}$ Car : $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{x}=a$

2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}(1-\cos x)$

$=\lim_{x\to0}x\frac{x}{\sin x}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=0\times1\times\frac{1}{2}=0$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}$: On pose $x-\frac{\pi}{4}=X$ Alors : $x=X+\frac{\pi}{4}$ et donc : $x+\frac{\pi}{4}=X+\frac{\pi}{2}$

$x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow X\to0$ et on a : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(X+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin X$

$\sqrt{2}-2\sin x=\sqrt{2}-2\sin\left(X+\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin X\cos\frac{\pi}{4}-\cos X\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}-2\sin x=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin X-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos X\right)=\sqrt{2}(1-\cos X-\sin X)$

Par suite : $\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}=\frac{-\sin X}{\sqrt{2}(1-\cos X-\sin X)}=\frac{-\frac{\sin X}{X}}{\sqrt{2}\left(\frac{1-\cos X}{X}-\frac{\sin X}{X}\right)}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\sin x}=\lim_{X\to0}\frac{-\frac{\sin X}{X}}{\sqrt{2}\left(\frac{1-\cos X}{X}-\frac{\sin X}{X}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3$

On a : $\lim_{x\to+\infty}5x^2+x-1=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}-4x+3=-\infty$

On trouve une forme indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-4x+3=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4x+3$

Comme on a : $x\to+\infty$ alors : $|x|=x$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4x+3=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4\right)+3$

Comme on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0-0=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-4=\sqrt{5}-4\prec0$ et $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

Alors : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x^2+x-1}-4x+3=-\infty$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4}\right)$

Etudions le signe de : x^2-3x+5 $\Delta=-11\prec0$ et $a\succ0$ donc : $x^2-3x+5\succ0$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x^2-3x+5|}{3|x|+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x+5}{-3x+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-3x}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x\right)=+\infty$

6)On a : $\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-1$

On a : $\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{x+\sqrt{-x}}{x-\sqrt{-x}}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{\sqrt{-x}(-\sqrt{-x}+1)}{\sqrt{-x}(-\sqrt{-x}-1)}=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{-\sqrt{-x}+1}{-\sqrt{-x}-1}=-1$

Donc : $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{x+\sqrt{|x|}}{x-\sqrt{|x|}}=-1}$

7) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$

On a : $\lim_{x\to1}\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}=0$ et $\lim_{x\to1}\sqrt{x}-1=0$: On trouve une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(2x-1-(x^2-x+1))(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(-x^2+3x-2)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-x-2)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(-x-2)(\sqrt{x}+1)}{\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}$

Comme : $\lim_{x\to1}(-x-2)(\sqrt{x}+1)=2$ et $\lim_{x\to1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)=2$

Alors : $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$

Exercice5: (4pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt}+1\text{pt})$;Considérons les fonctions f et g définies par :

$f(x)=\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)$ et $g(x)=\frac{b}{x}\times E\left(\frac{x}{a}\right)$ avec : $(a;b)\in\mathbb{R}_+^*$

Etudier et Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to0} f(x)$ 2) $\lim_{x\to0} g(x)$ 3) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ 4) $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$

Solution : 1) $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)$

- Calculons : $\lim_{x\to0^+} f(x)$????

Soit $x\in\left]0;+\infty\right[$; On sait que : $x-1\prec E(x)\le x\Rightarrow\frac{b}{x}-1\prec E\left(\frac{b}{x}\right)\le\frac{b}{x}$

$\Rightarrow\frac{x}{a}\times\left(\frac{b}{x}-1\right)\prec\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)\le\frac{x}{a}\times\frac{b}{x}\Rightarrow\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\prec\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)\le\frac{b}{a}$

Puisque : $\lim_{x\to0^+}\frac{b}{a}-\frac{x}{a}=\frac{b}{a}$ et $\lim_{x\to0^+}\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$ alors : $\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{b}{a}$

- Calculons : $\lim_{x\to0^-} f(x)$????

Soit $x\in\left]-\infty;0\right[$; On sait que : $x-1\prec E(x)\le x\Rightarrow\frac{b}{x}-1\prec E\left(\frac{b}{x}\right)\le\frac{b}{x}$

$\Rightarrow\frac{x}{a}\times\frac{b}{x}\le\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)\prec\frac{x}{a}\times\left(\frac{b}{x}-1\right)\Rightarrow\frac{b}{a}\le\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)\prec\frac{b}{a}-\frac{x}{a}$

Puisque : $\lim_{x\to0^-}\frac{b}{a}-\frac{x}{a}=\frac{b}{a}$ et $\lim_{x\to0^-}\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$ alors : $\lim_{x\to0^-} f(x)=\frac{b}{a}$

Puisque : $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)$ alors : $\lim_{x\to0} f(x)=\frac{b}{a}$

2)

- Calculons : $\lim_{x\to0^+} g(x)$????

Soit $x\in\left]0;a\right[\Rightarrow0\prec x\prec a\Rightarrow0\prec\frac{x}{a}\prec1$; $\Rightarrow E\left(\frac{x}{a}\right)=0\Rightarrow g(x)=\frac{b}{x}\times E\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{b}{x}\times0=0$

$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}0=0$

- Calculons : $\lim_{x\to0^-} g(x)$????

Soit $x\in\left]-a;0\right[\Rightarrow-a\prec x\prec0\Rightarrow-1\prec\frac{x}{a}\prec0$; $\Rightarrow E\left(\frac{x}{a}\right)=-1\Rightarrow g(x)=\frac{b}{x}\times E\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{b}{x}\times-1=-\frac{b}{x}$

$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^-}-\frac{b}{x}=+\infty$

Alors la fonction g n'admet pas de limite en 0

3) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$; $f(x)=\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)$

- Calculons : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$????

Soit $x\succ b\Rightarrow0\prec\frac{b}{x}\prec1$; $\Rightarrow E\left(\frac{b}{x}\right)=0\Rightarrow f(x)=\frac{x}{a}\times E\left(\frac{b}{x}\right)=\frac{x}{a}\times0=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}0=0$

- Calculons : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$???? à voir

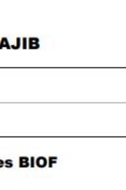
Exercice6 : (2pts) : $(1\text{pt}+1\text{pt})$ ABC est un triangle tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ positif.

On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

2) Montrer que : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}}\right)[2\pi]$



Solution : On a : $\begin{cases}AE=AB\\ \left(\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : $r(E)=B$ ❶

Et on a : $\begin{cases}AC=AG\\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ donc : ❷ $r(C)=G$

Et on a : $r(A)=A$ ❸ car A le centre de la rotation conserve les mesures des angles orientés

De : ❶ ; ❷ et ❸ en déduit que : $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}}\right)[2\pi]$

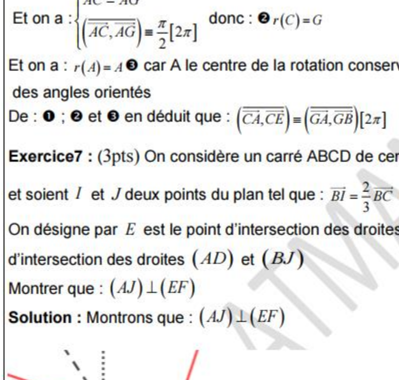
Exercice7 : (3pts) On considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

et soient I et J deux points du plan tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

On désigne par E est le point d'intersection des droites (AI) et (CD) et par F le point d'intersection des droites (AD) et (BJ)

Montrer que : $(AJ)\perp(EF)$

Solution : Montrons que : $(AJ)\perp(EF)$



Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : ABCD est un carré de centre O et $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : $r(A)=B$

On a : $r(B)=C$ et $r(C)=D$ et $r(I)=I'$ et $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

et puisque : la rotation r conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{CI'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Donc : $\overrightarrow{CI'}=\overrightarrow{CJ}$ C'est-à-dire : $I'=J$

Par conséquent : $r(I)=J$

Comme : on a $r(A)=B$ et $r(I)=J$ et l'angle de r est $\frac{\pi}{2}$ Alors : $\left(\overline{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BJ}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où : $(AI)\perp(BJ)$ et puisque $(AI)=(AE)$ car $I\in(AE)$ et $(BJ)=(FJ)$ car $F\in(BJ)$

Alors : $(AE)\perp(FJ)$

Donc : (FJ) est une hauteur du triangle AEF issue de F

D'autre part :on a : $(EJ)\perp(AF)$

Donc : (EJ) est une hauteur du triangle AEF issue de E et comme on a :

$(EJ)\perp(FJ)=\{J\}$

Alors : J est une l'intersection des hauteurs du triangle AEF

Donc : la hauteur du triangle AEF issue de A passe par J

D'où : $(AJ)\perp(EF)$

PROF: ATMANI NAJIB *C'est en forgeant que l'on devient forgeron: Dit un proverbe.*

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien